TRANSFORMATIONS DU PLAN

1 Généralités

1.1 Définitions

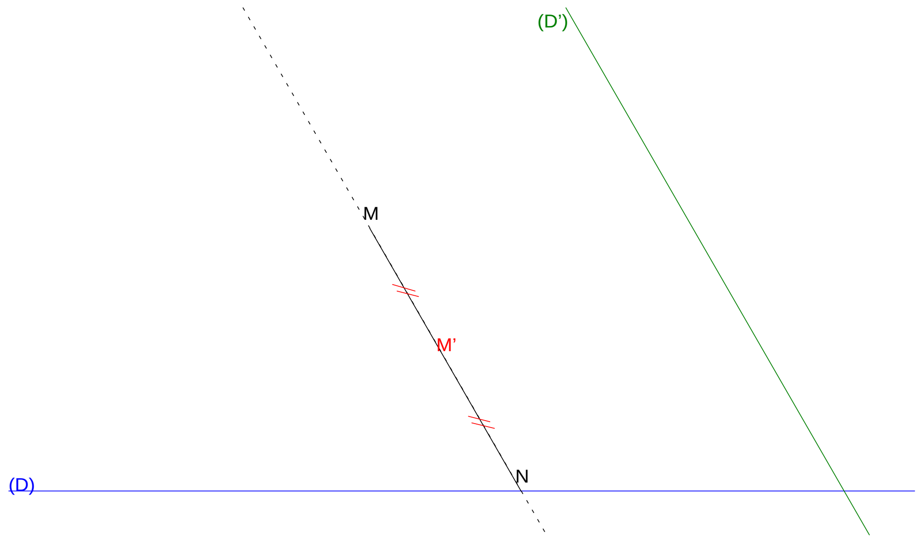
Une **transformation** du plan est une application bijective du plan dans lui-même. Autrement dit, c'est un mécanisme qui associe à tout point du plan un point image.
Les transformations qui conservent les distances sont les **isométries**.
Les transformations qui conservent les rapports entre les distances sont les **similitudes**.

1.2 Exemples

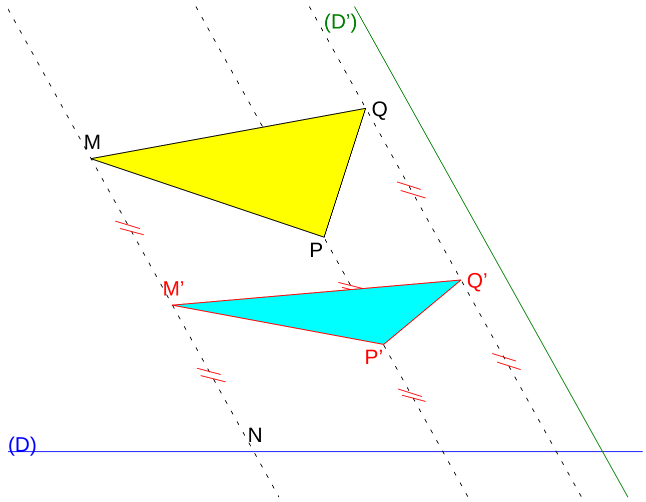
1.2.1 Une affinité

Soient D et D' deux droites sécantes. À tout point M du plan on assoie le point M' vérifiant les conditions suivantes :

- Si M appartient à D, M'=M.
- Si M n'appartient pas à D, on trace la parallèle à D' passant par M. Cette parallèle coupe D en un point N, M' est alors défini par $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.



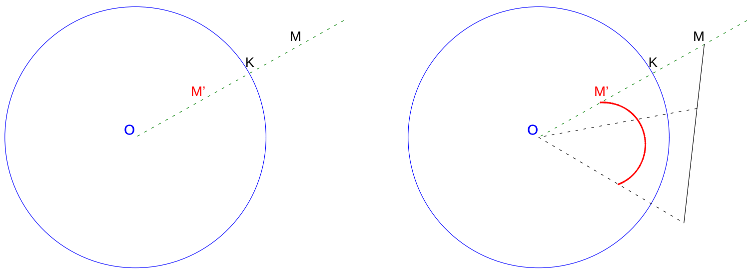
Les figures sont déformées, seul l'alignement est respecté, comme on le voit sur la figure ci-dessous, le triangle jaune devient le triangle bleu.



1.2.2 Une anamorphose

Soit un cercle C de centre O. On définit la symétrie S par rapport au cercle C par :

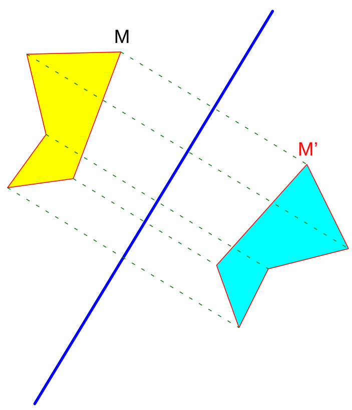
- Si M=O, M'=O.
- Si M est distinct de O, on trace la demi-droite [OM). Celle-ci coupe le cercle C en un point K. M' est alors défini par $\overrightarrow{KM'} = \overrightarrow{MK}$.



Cette transformation ne respecte pas l'alignement (sauf si les points sont alignés avec O).

2 Principales transformations

2.1 La symétrie axiale



2.1.1 Définition

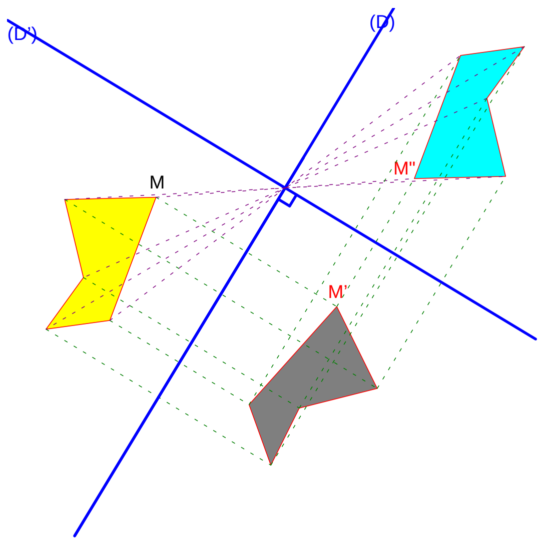
Soit D une droite. À tout point M du plan on assoie le point M'= S(M) vérifiant les conditions suivantes :

- Si M appartient à D, M'=M.
- Si M n'appartient pas à D, D est la médiatrice de [MM'].

2.1.2 Propriétés

- S(S(M))=M. On dit que S est une involution.
- S est une isométrie, elle conserve les distances, les angles, l'alignement, le milieu.
- L'image d'une figure par S est une figure qui ne lui est pas superposable, mais qui est superposable à son image dans un miroir.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

2.2 La symétrie centrale



Soient D et D' deux droites perpendiculaires, sécantes en O. On associe à tout point M son image M' par la symétrie d'axe D, puis l'image M" de M' par la symétrie d'axe D'. On s'intéresse à la transformation composée, qui transforme M en M".

2.2.1 Définition

Soit O un point. À tout point M du plan on assoie le point M'= S(M) vérifiant les conditions suivantes :

- Si M = O, M' = O.
- Si M est distinct de O, O est le milieu de [MM'].

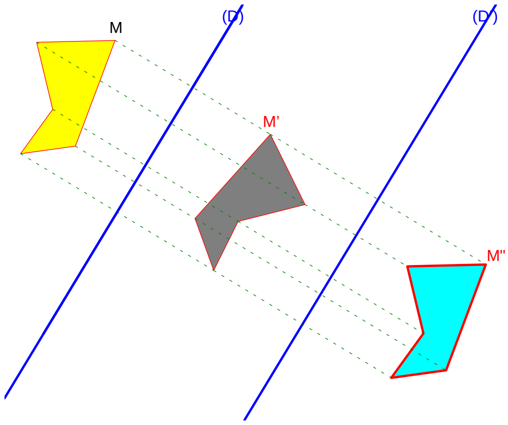
2.2.2 Propriétés

- S(S(M))=M. S est une involution.
- S est une isométrie, elle conserve les distances, les angles, l'alignement, le milieu.
- L'image d'une figure par S est une figure qui lui est superposable.

– L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
– L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

2.3 La translation

Soient D et D' deux droites strictement parallèles. On associe à tout point M son image M' par la symétrie d'axe D, puis l'image M" de M' par la symétrie d'axe D'. On s'intéresse à la transformation composée, qui transforme M en M".



2.3.1 Définition

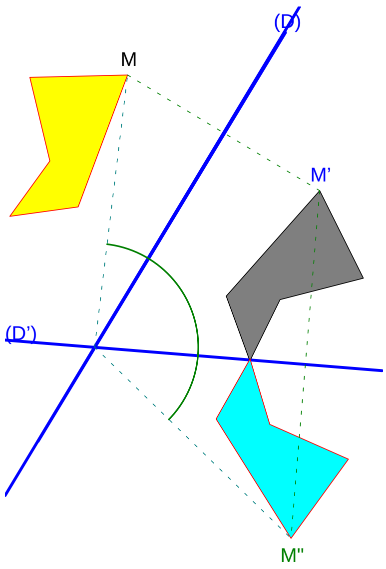
Soient A et B deux points. À tout point M du plan on assoie le point M'= T(M) tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
Si A et B sot distincts, on peut également définir la translation par : M' est le point tel que MABM' soit un parallélogramme.

2.3.2 Propriétés

– S est une isométrie, elle conserve les distances, les angles, l'alignement, le milieu.
– L'image d'une figure par S est une figure qui lui est superposable.
– L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
– L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

2.4 La rotation

Soient D et D' deux droites sécantes en un point O. On associe à tout point M son image M' par la symétrie d'axe D, puis l'image M" de M' par la symétrie d'axe D'. On s'intéresse à la transformation composée, qui transforme M en M".



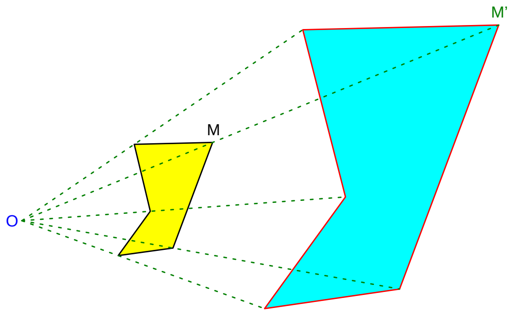
2.4.1 Définition

Soient O un point et α une mesure d'angle. On définit un sens de rotation.
À tout point M du plan on assoie le point M'= R(M) tel que OM=OM' et l'angle orienté $\widehat{\mathrm{MOM}'}$ mesure α.

2.4.2 Propriétés

- S est une isométrie, elle conserve les distances, les angles, l'alignement, le milieu.
- L'image d'une figure par S est une figure qui lui est superposable.
- L'image d'une droite est une droite.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

2.5 L'homothétie



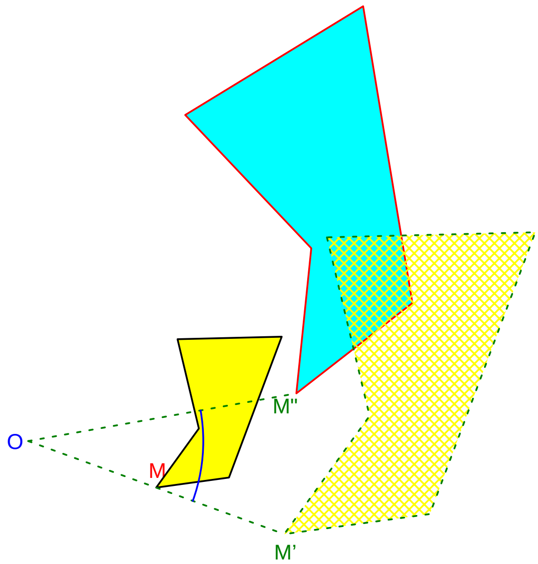
2.5.1 Définition

Soient O un point et k un réel non nul.
À tout point M du plan on assoie le point M'= H(M) tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

2.5.2 Propriétés

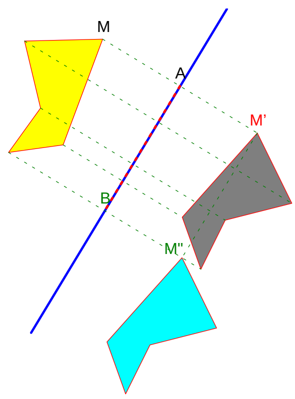
- Si k est différent de 1 et de -1, H n'est pas une isométrie. Les distances sont multipliées par k (pour k positif) ou par $-k$ (pour k négatif). L'homothétie conserve les rapports de distances, les angles, l'alignement, le milieu.
- L'image d'une figure par S est une figure de même forme.
- L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

2.6 La similitude directe



Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

2.7 La symétrie glissée



Une symétrie glissée est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points de l'axe.
La symétrie glissée est une isométrie.

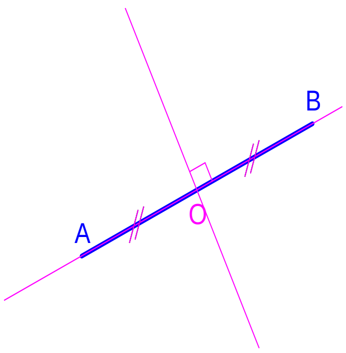
3 Éléments de symétrie d'une figure

3.1 Cas général

On dit qu'une figure a un axe de symétrie D (respectivement un centre de symétrie O) si elle est invariante par la symétrie orthogonale d'axe D (respectivement la symétrie centrale de centre O).
Remarque :
Si une figure est invariante par deux transformations, alors elle est invariante par leur composée. Ainsi si une figure a deux axes de symétrie orthogonaux, elle a un centre de symétrie.

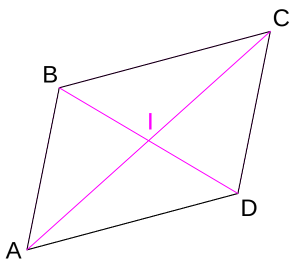
3.2 Quelques exemples

3.2.1 Deux points (ou un segment)



Soient A et B deux points distincts. La figure constituée par ces deux points est invariante par la symétrie d'axe (AB), la symétrie d'axe la médiatrice de [AB] et la symétrie centrale par rapport au milieu de [AB].

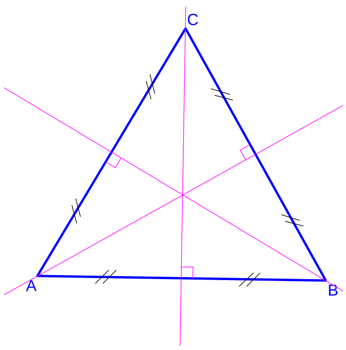
3.2.2 Le parallélogramme



Soit ABCD un parallélogramme non particulier, soit I l'intersection de ses diagonales, soit S la symétrie centrale de centre I, on a : S(A)=C, S(B)=D.

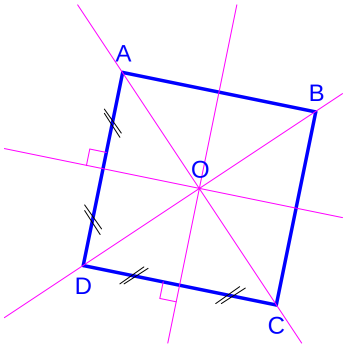
Réciproquement : Si A, B, C, D sont quatre points tels qu'il existe une symétrie centrale S vérifiant S(A)=C, S(B)=D, alors ABCD est un parallélogramme.

3.2.3 Le triangle équilatéral



Le triangle équilatéral admet trois axes de symétrie.
Soit O le centre du triangle, le triangle est invariant par les rotations de centre O et d'angles 120^o et 240^o.

3.2.4 Le carré



Le carré admet quatre axes de symétrie, un centre de symétrie.
Soit O son centre, le carré est invariant par les rotations de centre O et d'angle 90^o et 270^o.

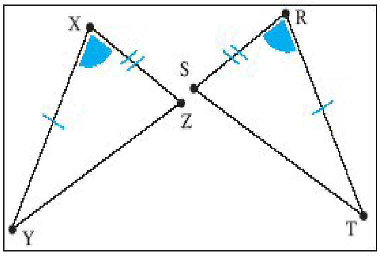
4 Triangles isométriques

4.1 Figures isométriques

Deux figures sont isométriques si l'une est l'image de l'autre par une isométrie, c'est à dire par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une rotation ou une symétrie glissée.

4.2 Cas d'isométrie des triangles

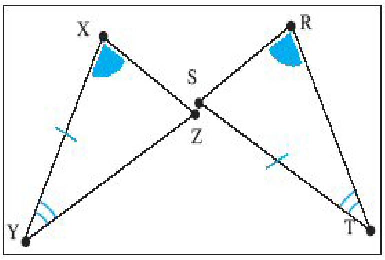
4.2.1 Premier cas



Deux triangles ABC et A'B'C' tels que :
- AB=AB' et AC=A'C'
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

sont isométriques.

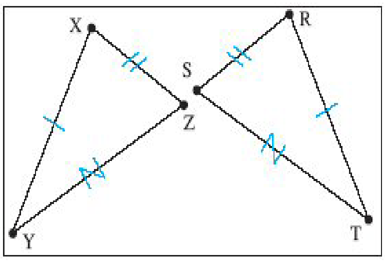
4.2.2 Deuxième cas



Deux triangles ABC et A'B'C' tels que :
- AB=AB'
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

sont isométriques.

4.2.3 Troisième cas



Deux triangles ABC et A'B'C' tels que :
- AB=AB' et AC=A'C'et BC=B'C'

sont isométriques.

4.2.4 Remarques

- Ces trois résultats sont appelés aussi les "trois cas d'égalité des triangles".
- Deux triangles dont les angles sont de même mesure ne sont pas forcément isométriques, on dit qu'ils sont "semblables".
- Si les triangles sont rectangles, on peut utiliser d'autres cas d'égalités en exploitant les relations entre les angles aigus.