Numération

Exercice 1

Le nombre s'écrit $a5b$, et $a+5+b$ est un multiple de 9. De plus $\overline{a5b} - \overline{b5a} = 198$, donc $(100a+b) - (100b+a) = 198$.
Donc $99a - 99b = 198$, donc $a - b = 2$.
Donc $a + 5 + b = 2b + 7$.
$2b + 7$ est un multiple de 9 si et seulement si $b = 1$. Le nombre est donc 351.

Exercice 2

$\overline{1253}^6 = 1.6^3 + 2.6^2 + 5.6 + 3 = 321$
$\overline{1100110}^2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2 + 0 = 102$
$\overline{1100110}^3 = 1.3^6 + 1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 1.3^2 + 1.3 + 0 = 984$
$\overline{A12}^{16} = 10.16^2 + 1.16 + 2 = 2578$
$\overline{124}^5 = 1.5^2 + 2.5 + 4 = 39$

Exercice 3

En base 4, le plus grand nombre à 12 chiffres est $\overline{333333333333}^4$, c'est à dire $\overline{1000000000000}^4 - 1$, donc il vaut $4^12 - 1 = 16777215$ en base 10.
En base 12, le plus grand nombre à 4 chiffres est $\overline{BBBB}^{12}$, c'est à dire $\overline{10000}^{12} - 1$, donc il vaut $12^4 - 1 = 20735$ en base 10.

Exercice 4

Un nombre s'écrit $\overline{21}^b$ en base b et 11 en base 10. Donc $2b + 1 = 11$, et b=5.
Un nombre s'écrit $\overline{105}^b$ en base b et 21 en base 10. Donc $b^2 + 5 = 21$, donc $b^2 = 16$. Cette équation a deux solutions : 4 et -4. Mais aucune des deux ne convient pour b car le chiffre 5 étant utilisé, la base est au moins 6. Il n'y a pas de solution.

Exercice 5

$\overline{1c3}^5 = 33$ implique : $25 + 5c + 3 = 33$, donc $c = 1$.

Exercice 6

En base b un nombre est divisible par b si son reste dans la division euclidienne par b est 0, donc si son chiffre des unités est 0.

Exercice 7

En base 7, on dispose de 7 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Ecrivons le nombre à trois chiffres de gauche à droite en utilisant trois chiffres différents.
Il y a 6 choix possibles pour le premier chiffre à gauche (car ce n'est pas un zéro), puis 6 pour celui du milieu(car l'un des chiffres a déjà été utilisé) puis 5 pour le dernier (puisque

deux chiffres ont été utilisés).
Donc $6 \times 6 \times 5 = 180$ possibilités.

Exercice 8

Pour obtenir un nombre minimal, il faut qu'il commence par $1000\ldots$.
On va donc "masser" un maximum de 9 à droite de l'écriture du nombre.
$1992 = 1 + 9 \times 221 + 2$, donc le nombre cherché sera : $1000\ldots2999\ldots$, avec 221 fois le chiffre 9 et 1769 zéros.

Exercice 9

$\overline{275}^8 = 2 \times 8^2 + 7 \times 8 + 5 = 2 \times 4^3 + 14 \times 4 + 4 + 1 = 2 \times 4^3 + (3 \times 4 + 2) \times 4 + 4 + 1$
donc : $\overline{275}^8 = 2 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 4 + 1 = 2 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = \overline{2331}^4$

Exercice 10

Pour comprendre, calculons $10^5 - 92$:
$10^5 - 92 = 100000 - 92 = 99900 + 100 - 92 = 99908$.
De même, $N = 10^{92} - 92 = 99\ldots900 + 100 - 92 = 99\ldots908$ avec 90 fois le chiffre 9.
La somme des chiffres vaut donc $90 \times 9 + 8 = 818$

Exercice 11

1. Combien y a-t-il de nombres à trois chiffres ne contenant pas le chiffre 2 ?
   Il y a 8 choix possibles pour le chiffre des centaines (pas de 0 ni de 2), puis 9 choix pour le chiffre des dizaines et 9 pour celui des unités, donc $8 \times 9 \times 9 = 648$ possibilités.
2. Combien y a-t-il de nombres à p chiffres ne contenant pas le chiffre 2 ?
   Avec le même raisonnement : il y a $8 \times 9^{p-1}$ possibilités.
3. Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres dont les chiffres sont distincts deux à deux ?
   Il y a 9 choix pour le chiffre des milliers, puis 9 pour celui des centaines, puis 8 pour celui des dizaines et 7 pour celui des unités, donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ possibilités.
4. Combien y a-t-il de nombres à p chiffres dont les chiffres sont distincts deux à deux ?
   Pour que ce soit possible, p ne peut pas dépasser 10. Le même raisonnement qu'au dessus donne le résultat : $9 \times 9 \times 8 \times \ldots \times (9 - p + 2)$

Exercice 12

On a utilisé 6869 chiffres pour numéroter les pages d'une encyclopédie.
Pour aller de la page 1 à la page 9 on utilise 9 chiffres, il en reste 6860.
Pour aller de la page 10 à la page 99, on utilise $2 \times 90 = 180$ chiffres, il en reste 6680.
Pour aller de la page 100 à la page 999, on utilise $3 \times 900 = 2700$ chiffres, il en reste 3980.
$3980 = 4 \times 995$, il y a donc 995 pages à 4 chiffres. La dernière page porte le numéro 1994.

Exercice 13

3548 se termine par un 8.
3548^2 se termine par un 4, car $8 \times 8 = 64$.
3548^3 se termine par un 2, car $3548^3 = 3548^2 \times 548$, 3548^2 se termine par un 4 et 3548 se termine par un 8, et $8 \times 4 = 32$.
De même, 3548^4 est le produit de 3548^3 qui se termine par 2 et de 3548, donc 3548^4 se termine par 6.
De même, 3548^5 se termine par 8, car $6 \times 8 = 48$.
Donc les chiffres des unités des puissances de 3548 se répètent selon le cycle : 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6...
Si la puissance est un multiple de 4, le chiffre des unités est 6. c'est donc le cas pour 3548^{28}.

Exercice 14

$n = 22\ldots22 = 2 \times 11\ldots11$.
Supposons que n soit un carré parfait, on aurait $n = p^2$. Comme n est pair, p le serait aussi (car le carré d'un nombre impair est impair). Donc p serait divisible par 2, et donc $n = p^2$ serait divisible par 4.
Ce n'est pas le cas car n est le produit de 2 et d'un nombre impair. Donc n n'est pas un carré parfait.