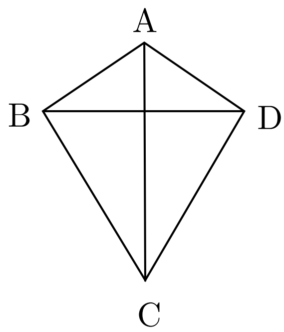
Géométrie

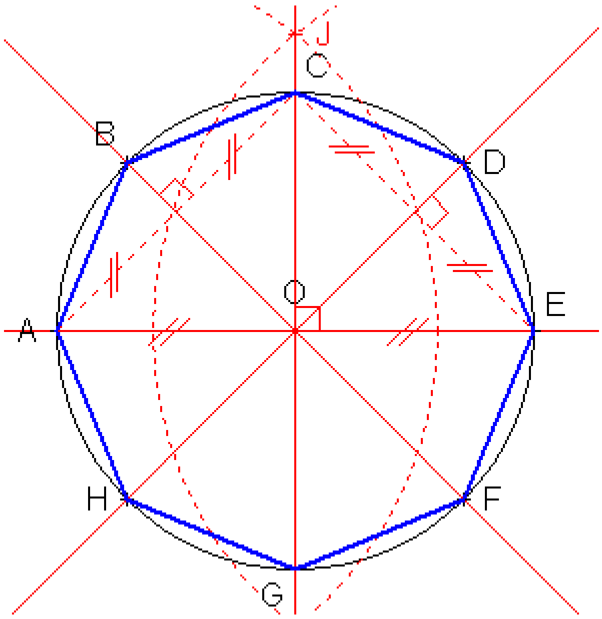
Exercice 1

AB=AD donc A appartient à la médiatrice de [BC].
BC=CD donc C appartient à la médiatrice de [BC].
Donc (AC) est la médiatrice de [BD].
Les deux diagonales sont perpendiculaires et se coupent au milieu de l'une d'entre elles.



Exercice 2

Tracer un cercle γ de centre O.
Tracer une droite passant par O, cette droite coupe γ en A et en E.
Tracer la médiatrice de [AE]. Pour cela il suffit de trouver un point autre que O, à égale distance de A et de E. On prend donc une ouverture de compas supérieure à OA et on trace deux arcs sécants d'origines A et E. Ces deux arcs se coupent en un point J, la médiatrice est (OJ).
Cette médiatrice coupe γ en C et en G. Il faut ensuite tracer la médiatrice des segments [AC] et [CE]. On procède comme précédemment. (on pourrait aussi tracer les bissectrices des angles de sommet O).
Ces médiatrices coupent le cercle γ en B et F, d'une part, en D et H d'autre part.
Tracer le polygone ABCDEFGH.

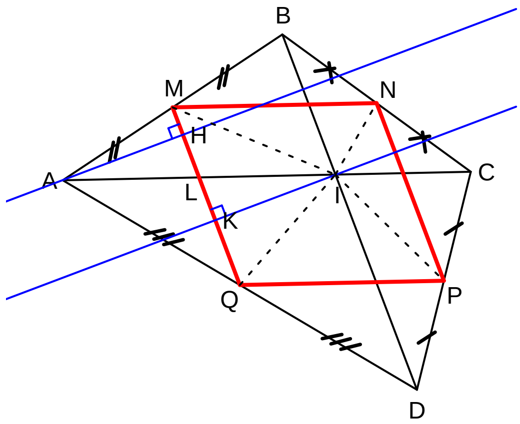


Exercice 3

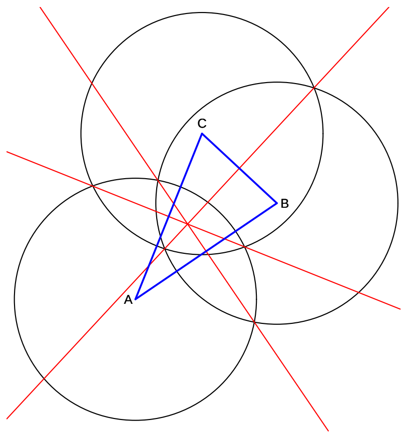
1. Dans le triangle ABD, (MQ) est une droite des milieux, donc (MQ)//(BD).
   Dans le triangle CBD, on a de même (NP)//(BD).
   Donc (MQ)//(NP).
   On montre de même que (MN)//(PQ) en utilisant les triangles ABC et DBC.
   Donc MNPQ est un parallélogramme.
2. Soient H et K les projetés orthogonaux de A et de I sur (MQ). Soit L le point d'intersection de (AC) et de (MQ).
   Dans le triangle AIB, la droite (MQ) est parallèle à (IB) et coupe [AB] en son milieu. D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, L est le milieu de [AI].
   Considérons la symétrie centrale de centre L : elle envoie A sur I, elle laisse la droite (MQ) invariante et envoie donc la perpendiculaire à (MQ) passant par A sur la perpendiculaire à (MQ) passant par I. Donc, par cette symétrie, la droite (AH) devient la droite (IK). Donc les intersections de ces deux droites avec (MQ) sont symétriques par rapport à L. Donc H et K sont symétriques par rapport à L.
   Donc AH=IK.

Donc les triangles AMQ et IMQ, qui ont la même base et des hauteurs de même longueur, ont la même aire.

3. On montre de même que BMN et IMN ont la même aire, puis que CNP et INP ont la même aire et que DPQ et IPQ ont la même aire. Donc l'aire de MNPQ est égale à l'aire des quatre triangles extérieurs. DOnc l'aire de MNPQ est la moitié de l'aire de ABCD.

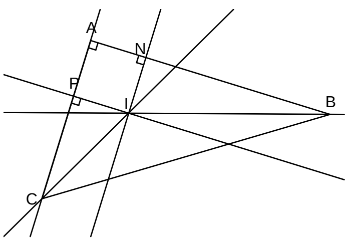


Exercice 4



Soient A, B et C les centres des trois cercles, par construction les trois droites sont les médiatrices du triangle ABC, elles sont donc concourantes.

Exercice 5

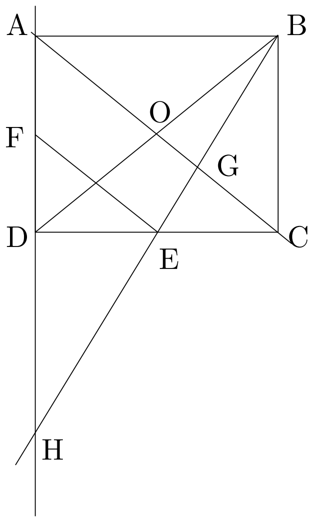


Le quadrilatère ANIP a trois angles droits, c'est donc un rectangle.
I est le centre du cercle inscrit, [IN] et[IP] sont des rayons de ce cercle. Donc IN=IP.
Donc ANIP est un carré.

Exercice 6

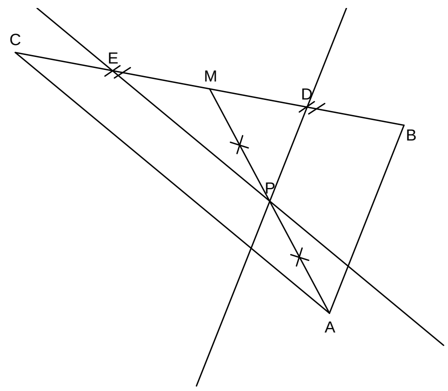
On place l'angle droit de l'équerre sur un point du cercle et on trace les deux droites perpendiculaires. D'après le théorème de l'angle inscrit, ces deux droites coupent le cercle en deux points diamétralement opposés. On trace ce diamètre.
On recommence la construction en partant d'un autre point du cercle, on obtient ainsi un deuxième diamètre. L'intersection des deux diamètres est le centre du cercle.

Exercice 7



1. On calcule AC en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B :
   $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 16 \times 2 = 96$.
   Donc $AC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.
   On calcule EF à l'aide du théorème de la droite des milieux appliqué dans le triangle ACD (on pourrait aussi utiliser le théorème de Pythagore dans DEF) : EF est la moitié de AC, donc $EF = 2\sqrt{6}$.
   Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les droites (AD) et (BE) sont sécantes, on peut appliquer le théorème de Thales. On a :
   $\dfrac{DH}{AD} = \dfrac{DE}{AH} = \dfrac{4}{8}$. Donc DH= $4\sqrt{2}$.
   Les diagonales du rectangle ont le même milieu O, donc (AC) est une médiane du triangle BCD. (BE) est aussi une médiane, donc G est le centre de gravité de ce triangle.
   Donc $CG = \dfrac{2}{3}CO = \dfrac{1}{3}AC$.
   On en déduit que :
   $AG = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3}4\sqrt{6} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$
2. On calcule BE en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle BEC. On a :
   $BE^2 = CE^2 + BC^2 = 16 + 16 \times 2 = 48$
   Donc $BE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.
   (BE) est une médiane de BCD, donc
   $BG = \dfrac{2}{3}BE = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
3. $AG^2 = (\dfrac{8\sqrt{6}}{3})^2 = \dfrac{384}{9}$
   $BG^2 = (\dfrac{8\sqrt{3}}{3})^2 = \dfrac{192}{9}$
   $AB^2 = 64$.
   $\dfrac{384}{9} + \dfrac{192}{9} = \dfrac{576}{9} = 64$.
   On a donc $AG^2 + BG^2 = AB^2$, d'après la réciproque du théorème de Pyhagore, le triangle ABG est rectangle en G.

Exercice 8

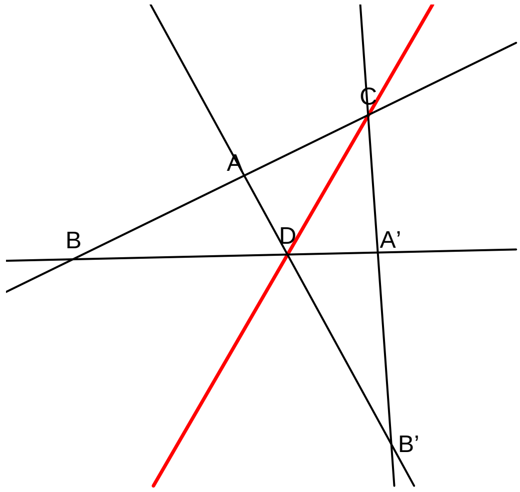


Considérons le triangle AMB. La droite (DP) est parallèle à la droite (AB) et P est le milieu de [AM]. D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux, D est le milieu de [MB]. Donc $MD = \dfrac{1}{2}MB$

On montre de même que E est le milieu de [CM] et que $ME = \dfrac{1}{2}MC$

Comme MC=MB, on a ME=MD, et M est le milieu de [ME].

Exercice 9



Soit B' le symétrique de B.
La droite (AB) coupe l'axe en C, donc la droite (CA') est symétrique de la droite (AB). Donc B' appartient à (CA').
La droite (A'B) coupe l'axe en D, donc la droite (CA) est symétrique de la droite (A'B). Donc B' appartient à (CA).
(Cette construction ne fonctionnerait pas si (AB) était parallèle ou perpendiculaire à l'axe.)