

Multiples et diviseurs

Exercice 1

Soient XY et XZ les écritures des deux nombres.

On a donc $Y = 10 - Z$. Le produit de XY et XZ vaut : $(10X + Y)(10X + Z) = 100X^2 + 10X(Y + Z) + YZ$.
Or $Y + Z = 10$, le produit vaut donc $100(X^2 + X) + YZ = 100X(X + 1) + YZ$.

Exercice 2

$$n \times 9 = 10n - n = 10n - 10 + 10 - n = (n - 1) \times 10 + (10 - n).$$

En levant le nième doigt, il reste $n - 1$ doigts à gauche et $10 - n$ doigts à droite du doigt levé.

Exercice 3

- $X+2+3$ doit être un multiple de 3. X peut donc être 1, 4 ou 7.
- Le PPCM de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 est aussi celui de 9, 8, 7 et 5, c'est 2520.
- $X2Y$ est un multiple de 42 qui est le PPCM de 2, 3 et 7. On cherche parmi les multiples de 42 qui ont trois chiffres, ceux qui ont un 2 comme chiffre des dizaines. il y a trois solutions : 126, 420 et 924.

Exercice 4

Soit n le nombre de fruits. $n - 1$ est divisible par 4, 5 et 6, donc par leur PPCM 60.

n est divisible par 7.

La solution la plus simple à comprendre mais la plus longue à réaliser est de chercher parmi les multiples de 60 compris entre 500 et 1000 quel est celui qui est de la forme $7k - 1$.

Une solution plus compliquée et plus rapide :

$n - 1$ est un multiple de 60, donc n est de la forme $60k + 1$.

Or $60k + 1 = 56k + 4k + 1$. n est divisible par 7, $56k$ est divisible par 7, donc $4k + 1$ est divisible par 7.

Si un nombre est divisible par 7, son double l'est aussi. Donc $8k + 2$ est divisible par 7.

Or $8k + 2 = 7k + k + 2$, et $7k$ est un multiple de 7, donc $k + 2$ est un multiple de 7. Donc k est de la forme $7h - 2$.

Donc n est de la forme $60(7h - 2) + 1$, c'est à dire $420h - 119$.

Comme n est compris entre 500 et 1000, h ne peut valoir que 2 et on trouve $n = 420 \times 2 - 119 = 721$.

Exercice 5

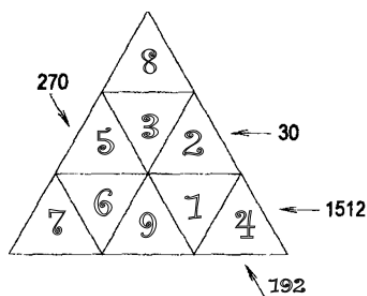
En base 8, un nombre d'écriture $ABCD$ vaut $A.8^3 + B.8^2 + C.8 + D.1$.

Or $8^3 = 512 = 7 \times 73 + 1$, $8^2 = 64 = 7 \times 9 + 1$ et $8 = 7 + 1$.

Donc $ABCD$ vaut $A(7 \times 73 + 1) + B(7 \times 9 + 1) + C(7 + 1) + D = 7 \times (73A + 9B + C) + A + B + C + D$.

Donc $ABCD$ est divisible par 7 si la $A + B + C + D$ est divisible par 7.

Exercice 6



On peut placer immédiatement le 5 et le 7.

Ensuite on utilise les décompositions des nombres : $270 = 5 \times 6 \times 9$. On sait donc où sont le 6 et le 9 à

une permutation près.

$30 = 5 \times 2 \times 3$ On sait de même où sont le 2 et le 3 à une permutation près.

$192 = 2 \times 3 \times 32$. Donc, comme le 2 et le 3 sont déjà dans cette rangée, les trois autres cases sont le 1, le 4 et le 8.

$1512 = 7 \times 6 \times 9 \times 4$. Trois cases sont occupées par le 7, le 6 et le 9, les deux autres sont donc 1 et 4.

Donc le 8 est en haut.

On peut ensuite remplir, la solution ci-contre convient, mais on peut permuter le 3 et le 2, le 6 et le 9, le 1 et le 4. Il y a donc 8 manières différentes de remplir la grille.

Exercice 7

- 100 est divisible par 4, donc tout nombre $n = \dots mcd u$, supérieur à 100, est la somme d'un multiple de 4 et du nombre d'écriture du .
 n est donc divisible par 4 si et seulement si du est divisible par 4.
- 100 est aussi divisible par 25, donc de même n est divisible par 25 si du l'est.
- $1000 = 8 \times 125$. Donc $n = \dots mcd u$ supérieur à 1000 est la somme d'un multiple de 8 (et de 125) et du nombre d'écriture cdu . n est divisible par 8 (par 125) si cdu est divisible par 8 (par 125)

Exercice 8

$$2000 = 2^4 \times 5^3$$

1997 est premier, car il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{1997}$. ($\sqrt{1997} \approx 44,7$, il faut donc tester les diviseurs : 2, 3, 5, 7, ... 41, 43).

Exercice 9

Soit n le nombre d'élèves, $n - 9$ est un multiple commun à 18, 20 et 24, donc à leur PGCD.

$$\text{PGCD}(18, 20, 24) = \text{PGCD}(2 \times 3^2, 2^2 \times 5, 2^3 \times 3) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360.$$

Le nombre d'élèves est un multiple de 360 auquel on ajoute 9. Il est compris entre 500 et 1000.

Le seul nombre qui convient est 729.

Exercice 10

Une solution évidente est 0. Une autre est 26.

Soit a le nombre cherché et q l'entier qui est à la fois le quotient et le reste. On a :

$a = 25q + q$, donc $a = 26q$, avec $0 \leq q \leq 24$. Tous les nombres de ce type conviennent, il y en a 25.

Exercice 11

Dans la division par 5, un nombre A donne un reste de 3.

- Soit q le quotient de la division de A par 5, on a $A = 5q + 3$.
Donc $14A = 70q + 42$, c'est à dire $14A = 70q + 40 + 2 = 5(14q + 8) + 2$. Le reste est donc 2.
- on multiplie A par un nombre entier m supérieur à 1. On a $mA = 5mq + 3m$. Le reste de la division de mA par 5 est le reste de la division de $3m$ par 5.
Pour $m = 328$, $3m = 984$, le reste est donc 4.
Pour $m = 5^{36} + 2$, $3m = 3 \times 5^{36} + 6 = 3 \times 5^{36} + 5 + 1$, donc le reste est 1.
- On désigne par A_m le produit de A par m . Compléter le tableau suivant :

Dividende	A	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$	$7A$	$8A$	$9A$	$10A$
Reste	3	1	4	2	0	3	1	4	2	0

Les restes se répètent périodiquement suivant une périodicité de 5 termes.

Si m est un multiple de 5, le reste est 0, si c'est un multiple de 5 plus 1, le reste est 3, etc. Si on connaît le reste pour m , le reste pour $m + 1$ est le suivant dans le cycle.

Pour connaître le reste de A_m dans la division par 5 il suffit de connaître le reste de la division de m par 5, pour se situer dans le cycle.

Exercice 12

Explication du calcul figurant sur le papyrus :

Le scribe écrit une partie de la table de 8, en élargissant cette table à des nombres fractionnaires, mais en se limitant aux puissances de 2.

Il a décomposé 51 en base 2 : $32+16+2+1$, puis il établit une correspondance proportionnelle avec 8 : si l'unité est 8, le double est 16, la moitié est 4 ...

Pour la division de 135 par 32, on procède ainsi :

	1	32
	2	64
→	4	128
	$\frac{1}{2}$	16
	$\frac{1}{4}$	8
→	$\frac{1}{8}$	4
→	$\frac{1}{16}$	2
→	$\frac{1}{32}$	1

$$135 = 128 + 4 + 2 + 1$$

On garde donc dans le tableau les lignes qui correspondent à 128, 4, 2 et 1.

Et on a : 135 divisé par 32 égalent $4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$.

Exercice 13

Soit N le nombre choisi, après l'opération il devient $7 \times 15873 \times N$, donc $111111 \times N$. Si N s'écrit du , on obtient donc :

$$111111 \times (10d + u) = 1000000d + 111110d + 111110u + u = 1000000d + 111110(d + u) + u.$$

Si $d + u < 10$, le premier chiffre du résultat est d , le dernier chiffre u et tous les chiffres du milieu sont identiques.

Exemple $111111 \times 32 = 3555552$.

Si $d + u \geq 10$, les chiffres intermédiaires ne sont pas tous identiques, à cause de la retenue.

Exemples : $111111 \times 48 = 5333328$ ou $111111 \times 94 = 10444434$.

En ce cas le nombre de millions du résultat est supérieur de 1 à d et le chiffre des unités du résultat est u .

Exercice 14

Prenons un exemple : 8, 9, 10.

$$8 \times 10 = 80 \text{ et } 9^2 = 81.$$

Soient $n-1$, n , et $n+1$ les trois nombres. Le produit du premier par le dernier est donc $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$.