Connaissance des nombres

Exercice 1

$a = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{12} = \frac{32}{48} - \frac{36}{48} - \frac{6}{48} + \frac{20}{48} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$
$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.
$\frac{a}{b} = \frac{5}{24} \div \frac{5}{12} = \frac{5}{24} \times \frac{12}{5} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit n le nombre cherché, on a donc : $\frac{4}{5} \times n = 24$.
Donc $n = \frac{5}{4} \times 24 = 30$.

Exercice 3

Un cent millième de dix millions est égal à $\frac{10000000}{100000} = 100$ (ou, avec les puissances de dix : $\frac{10^7}{10^5} = 10^2$).
Un dix millionième de dix milliards est égal à $\frac{10000000000}{10000000} = 1000$ (ou, avec les puissances de dix : $\frac{10^{10}}{10^7} = 10^3$).
C'est donc faux.

Exercice 4

C'est faux. $\frac{3}{7} = 0,4285714428571\ldots$. Il y a une infinité de décimales.
La valeur proposée n'est qu'une valeur approchée à 10^{-10} près par défaut.

Exercice 5

$$a = \frac{\frac{5}{2} \div \frac{7}{2}}{\frac{13}{5}} \div \frac{8}{13} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{2}{7}}{\frac{13}{5}} \times \frac{13}{8}$$

$$a = \frac{\frac{10}{14}}{\frac{13}{5}} \times \frac{13}{8} = \frac{10}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{13}{8} = \frac{10 \times 5 \times 13}{14 \times 13 \times 8} = \frac{10 \times 5}{14 \times 8} = \frac{50}{112} = \frac{25}{56}$$

$$b = ((\frac{5}{2,5})^2)^3 \times (\frac{1}{2})^4 = (2^2)^3 \times (\frac{1}{2^4}) = (2)^6 \times (\frac{1}{2^4}) = 2^2 = 4$$

$$c = 2 + \frac{8}{9 + \frac{5}{9}} = 2 + \frac{8}{\frac{86}{9}} = 2 + 8 \times \frac{9}{86} = 2 + \frac{72}{86} = \frac{244}{86} = \frac{122}{43}$$

$$d = \frac{\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3} + 2} = \frac{\frac{3}{24} + \frac{18}{24} - \frac{2}{24}}{\frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6}} = \frac{\frac{19}{24}}{\frac{19}{6}} = \frac{19}{24} \times \frac{6}{19} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Exercice 6

$((5 \times 4) \div 6) + (3 + (2 \div ((5-1)^2 \div 4)))$.
La multiplication et la division ont priorité sur l'addition et la soustraction. Il faut donc garder les parenthèses autour de $(5-1)$ qui est à mettre à la puissance 2, sinon seul le 1 serait mis au carré.
Il faut aussi garder les parenthèses autour de $((5-1)^2 \div 4)$, sinon on diviserait le 2 successivement par

$(5-1)^2$ et par 4, donc par 16 et par 4, au lieu de diviser par $\dfrac{16}{4}$.
On obtient finalement : $5 \times 4 \div 6 + 3 + 2 \div ((5-1)^2 \div 4))$

Exercice 7

10^9 billets de banque formeraient une tour de 10 km de haut, donc de 10^4 m, de 10^7 mm.
L'épaisseur d'un billet est donc de 10^{-5} m ou de 10^{-2} mm. C'est à dire un centième de millimètre.

Exercice 8

Le quart de l'opposé du carré de l'inverse d'un nombre vaut $-\dfrac{1}{4}$.
Soit x le nombre cherché. On a donc :
$\dfrac{1}{4} \times (-(\dfrac{1}{x})^2) = -\dfrac{1}{4}$
Donc : $(\dfrac{1}{x^2}) = 1$ donc $x^2 = 1$.
Deux nombres conviennent : 1 et -1.

Exercice 9

$A = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$
$B = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{7}{3}} = 1 + \dfrac{3}{7} = \dfrac{10}{7}$
$C = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{4}{13}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{30}{13}} = 1 + \dfrac{13}{30} = \dfrac{43}{30}$.
Pour ranger ces trois nombres, il faut les mettre au même dénominateur :
$A = \dfrac{305}{210}$; $B = \dfrac{300}{210}$; $C = \dfrac{301}{210}$.
Donc $B < C < A$.

Exercice 10

L'erreur intervient à la cinquième étape : on ne peut pas simplifier par $(x - y - z)$ car ce nombre est nul.

Exercice 11

Le volume de sable, en m^3, est de $1 \times 2000 \times 50 = 100000 = 10^5$. Comme un mètre cube contient 10^9 mm^3, le volume est de 10^{14} mm^3. Et comme il y a 10 grains par mm^3, cela fait 10^{15} grains en tout.

Exercice 12

Soit n le nombre de cubes de Julien.
$n + 4$ est un carré. Il existe donc un nombre p tel que $n + 4 = p^2$.
Avec le carré de côté $p - 1$ on obtient un total de $n - 11$ cubes. Donc $(p-1)^2 = n - 11$.
Donc $p^2 - 2p + 1 = n + 11$. On remplace p^2 par $n + 4$ et on obtient : $n + 4 - 2p + 1 = n - 11$.
Donc $p = 8$ et $n = p^2 - 4 = 60$.

Exercice 13

Soient respectivement x, y et z les âges de Samuel et de ses sœurs par ordre décroissant d'âge.
Traduisons l'énoncé en équations :
"Son âge est la somme des âges de ses deux petites sœurs." Donc $x = y + z$ (1)
"on trouve 66 quand on retranche au carré de l'âge de Samuel la somme des carrés des âges de ses sœurs."
Donc $x^2 - y^2 - z^2 = 66$ (2)
"les âges des enfants sont des nombres entiers supérieurs à deux." Donc $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 2$.
En passant au carré dans la première équation, on obtient : $x^2 = y^2 + z^2 + 2yz$.

Donc $x^2 - y^2 - z^2 = 2yz$.
On remplace dans la deuxième équation : $2yz = 66$, donc $yz = 33$.
y et z sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2, les seules valeurs possibles sont $y = 11$ et $z = 3$.
Donc $x = 11 + 3 = 14$.

Exercice 14

L'aire du carré de départ est de 100 cm^2. 64% de cette aire mesurent donc 64 cm^2.
L'aire restante est $100 - 4x^2$. On a donc l'équation : $100 - 4x^2 = 64$.
Donc $4x^2 = 36$, d'où $x^2 = 9$. x est positif. Donc $x = 3$.

Exercice 15

Soit x la quantité vendue le lundi. Le mardi, le pompiste a donc vendu $(x+100)$ litres, le mercredi, $(x+100)$ litres et ainsi de suite.
On a donc l'équation : $x + x + 100 + x + 200 + x + 300 + x + 400 + x + 500 + x + 600 = 4200$.
Donc $7x = 2100$, et $x = 300$. Il a vendu 300 litres le lundi.

Exercice 16

Soit x le prix du ballon et soir n le nombre initial d'enfants. On a les équations :
$n \times 2 = x$ et $(n - 3) \times 2,5 = x$.
Donc $2n = 2,5(n - 3)$ d'où $n = 15$.
Donc $x = 2 \times 15 = 30$. Le prix est de 30 euros.

Exercice 17

$a - b = 1988 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 1986 + 1987) - 1987 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 1986 + 1987) - 1988 \times 1987$
$a - b = (1988 - 1987)(1 + 2 + 3 + \ldots + 1986 + 1987) - 1988 \times 1987$
$a - b = (1 + 2 + 3 + \ldots + 1986 + 1987) - 1988 \times 1987$
or $1 + 2 + 3 + \ldots + 1986 + 1987 = (1 + 1987) + (2 + 1986) + \ldots + (993 + 994)$.
Cette somme est donc constituée de 993 termes égaux à 1988, elle vaut donc 993×1988.
Donc $a - b = 993 \times 1988 - 1988 \times 1987 = 1988 \times (993 - 1987)$.
Donc $a - b < 0$, donc $a < b$.

Exercice 18

Soit n le premier des quatre nombres, on a :
$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 342$.
Donc $4n + 6 = 342$, d'où $4n = 336$ et $n = 84$.
Les nombres sont 84, 85, 86 et 87.

Exercice 19

Soit n le plus petit des nombres cherchés. On a :
$n + n + 2 + n + 4 = 27$, donc $3n = 21$ et $n = 7$.
7 est bien impair, les nombres sont 7, 9 et 11.

Exercice 20

Voir exercice 17 :
$1 + 200 = 2 + 199 = 3 + 198 = \ldots = 100 + 101 = 201$.
La somme peut être organisée pour être constituée de 100 termes égaux à 201. Elle vaut donc 20100.

Exercice 21

Soient $x-1$, x et $x+1$ les trois nombres cherchés.
On a $\dfrac{(x-1)x(x+1)}{(x-1)+x+(x+1)} = 16$
Donc $\dfrac{(x-1)x(x+1)}{3x} = 16$
Donc $\dfrac{(x-1)(x+1)}{3} = 16$
Or $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, on a donc $x^2 - 1 = 48$
D'où $x^2 = 49$. Donc $x = 7$ ou $x = -7$. Le problème a deux solutions : 6, 7, 8 et -8, -7, -6.

Exercice 22

Soient $x-1$, x et $x+1$ les trois nombres cherchés.
On a $(x-1)+x+(x+1) = 1995$, donc $3x = 1995$, donc $x = 665$. Les nombres sont 664,665 et 666.
Pour 1789 le problème n'a pas de solution car 1789 n'est pas divisible par 3.

Exercice 23

Soit x le nombre de cubes sur l'arète du cube du milieu.
On a $5(x-1)+5x+5(x+1) = T-30$, où T désigne la taille en cm du petit Paul.
Donc $15x = T-30$, donc $T = 15x+30$.
On sait par ailleurs que l'enfant a utilisé $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3$ cubes, que cela constitue toute sa collection, et que ce nombre est le cube d'un entier N car les cubes remplissent toute la boîte cubique où ils sont rangés.
On a donc : $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3 = 3x^3+6x = N^3$.
Le petit Paul, comme son nom l'indique, est petit, mais debout ! T donc $15x+30$ est inférieur à 200 et supérieur à 80, donc $5 \geqslant x \geqslant 3$. On essaie les différentes valeurs possibles pour x.
Si $x = 3$, $3x^3+6x = 99$ et 99 n'est pas un cube parfait.
Si $x = 4$, $3x^3+6x = 216$ et 216 est le cube de 6.
Si $x = 5$, $3x^3+6x = 405$ et 405 n'est pas un cube parfait.
La seule solution plausible est donc obtenue pour $x = 4$, on a alors $T = 120$ cm.

Exercice 24

Soit x le nombre d'écus dont dispose le marchand au début de l'histoire.
Après la première foire, il dispose de $2x-30$ écus.
Après la deuxième foire, il dispose de $3(2x-30)-54$ écus, donc de $6x-144$ écus.
Après la troisième foire, il dispose de $4(6x-144)-72$ écus, donc de $24x-648$ écus.
Il lui reste 48 écus, donc : $24x-648 = 48$. Donc $24x = 696$ et $x = 29$.
Il avait 29 écus au départ.