

LA MULTIPLICATION DANS IN

1 Rappels théoriques

1.1 Définitions

Définition additive

La multiplication est l'opération qui à deux nombres entiers naturels a et b associe leur produit $a \times b$, égal à la somme de b termes égaux à a .

Définition par le produit cartésien

Soit E un ensemble à a éléments, et F un ensemble à b éléments. Le produit cartésien $E \times F$ comporte $a \times b$ éléments.

exemple : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$ et $F = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$, le produit cartésien est l'ensemble des éléments du type $(V, \heartsuit)$. Il y a 32 éléments dans le produit cartésien.

1.2 Propriétés

La multiplication est commutative : $a \times b = b \times a$

La multiplication est associative : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

1 est élément neutre : $1 \times a = a$.

0 est élément absorbant : $0 \times a = a$.

1.3 Technique opératoire

La technique opératoire utilise la distributivité par rapport à l'addition :

$$725 \times 38 = 725 \times 8 + 725 \times 30 = 5800 + 21750$$

d'où :

$$\begin{array}{r} 725 \\ \times 38 \\ \hline 5800 \\ 21750 \\ \hline 27550 \end{array}$$

2 Les programmes

2.1 Au cycle 2,

en Grande Section et au Cours Préparatoire les éventuels problèmes multiplicatifs sont traités additivement.

ex. $10 + 10 + 10 + 10$

La multiplication est réellement introduite au Cours Élémentaire 1.

On attend d'un élève, en fin de cycle 2, qu'il sache :

- maîtriser la signification de l'opération. (notamment par rapport à l'addition)
- les décompositions multiplicatives des nombres jusqu'à 20.
- établir une table de multiples de proche en proche.
- trouver un résultat à partir d'un résultat connu (ex. 11×6 à partir de 10×6)

Les commentaires des programmes de 2002 précisent :

« Le calcul posé est limité, au cycle 2, à la technique opératoire de l'addition. Cela ne signifie pas que d'autres calculs relevant de la soustraction ou de la multiplication ne sont pas abordés. Mais, chaque fois, leur traitement relève d'un calcul réfléchi (purements mental ou

aidé par des traces écrites) construit par l'élève en s'appuyant sur la connaissance qu'il a des nombres et des opérations et sur les résultats qu'il a mémorisés : c'est donc un raisonnement qui guide son traitement.

Dès le début de l'école élémentaire, les élèves utilisent une calculatrice, lorsque son usage est estimé pertinent par l'enseignant. Elle peut être utilisée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes par exemple, lorsque après avoir déterminé les calculs nécessaires, l'élève n'est pas capable de les exécuter assez rapidement ou avec une bonne fiabilité et donc avec le risque de perdre le fil de sa réflexion. Elle peut également être utilisée pour favoriser des explorations sur les nombres, par exemple l'observation de suites de nombres de 1 en 1 ou de 10 en 10. L'enseignant détermine les occasions où elle est mise à disposition des élèves, en particulier pour ne pas porter préjudice à l'apprentissage du calcul mental.

Les signes opératoires (+, -, ×) sont présentés lorsque les élèves sont déjà familiarisés avec des problèmes relevant des opérations correspondantes et que certains résultats peuvent être obtenus et formulés oralement. Les écritures lacunaires (du type $5 + \dots = 12$) peuvent être utilisées.

Les mots «somme», « différence » ou « écart », «complément» et «produit » font partie du vocabulaire utilisé au cycle 2.

2.2 Au cycle 3

Un élève doit savoir, en fin de cycle 3 :

- réciter et utiliser les tables de multiplication
- construire, compléter, utiliser une table de Pythagore.
- multiplier par 10, 100, 20, 200...
- multiplier rapidement par 2, par 5.
- trouver différentes décompositions multiplicatives d'un nombre.
- multiplier un nombre à 2 ou 3 chiffres (entier ou décimal) par un nombre à 2 chiffres, en utilisant la disposition de l'opération, en maîtrisant l'utilisation de la retenue.

3 Les stratégies de présentation

3.1 Approche additive

Entrée par un problème : On dispose de 6 boîtes contenant chacune 4 billes, combien cela fait-il de billes ?

$4+4+4+4+4+4$, que l'on note 6×4 , et que l'on calcule par l'une ou l'autre procédure additive (dessin et décompte, sauts de 4 en 4 sur la file numérique..)

3.2 Approche par les rectangles

A partir d'une grille rectangulaire de 4 lignes et 8 colonnes, on cherche le nombre de cases. On note $8+8+8+8=4 \times 8$.

On constate que l'on pourrait "regarder le tableau dans l'autre sens", et donc que $8 \times 4 = 4 \times 8$.

Les tableaux permettent également de mettre en évidence la distributivité : $5 \times 4 + 3 \times 4 = 8 \times 4$.

On peut aussi facilement illustrer l'associativité.

$$48 \times 35 = (40 + 8) \times (30 + 5) = 40 \times 30 + 40 \times 5 + 8 \times 30 + 8 \times 5$$

Ce qui peut se schématiser :

40	8	
40×30	8×30	30
40×5	8×5	5

D'où

48	
48×30	30
48×5	5

C'est à dire

48	
1440	30
240	5

4 Vers la technique opératoire

Extrait du document d'accompagnement des programmes relatif au calcul posé :

Étapes dans le cas de la multiplication des nombres entiers

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :

- tables de multiplication ;
- numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
- règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300... ;
- distributivité de la multiplication sur l'addition.

...

Le cas de la technique de multiplication de nombres à deux chiffres, trois chiffres... **par un nombre à un chiffre** est plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Elle repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($27 \times 6 = 6 \times 7 + 6 \times 20$). Dans une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger la charge de travail. Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.

Le cas de la technique de la multiplication **par un nombre à plusieurs chiffres** intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la 1^{ère} année du cycle 3 ou la 2^e année du cycle 3. Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

$$\begin{array}{r}
 523 \\
 \times 25 \\
 \hline
 2615 \quad 523 \times 5 \\
 10460 \quad 523 \times 20 \\
 \hline
 13075
 \end{array}$$

On installera donc dans un premier temps le calcul en ligne :

$$523 \times 5 = 500 \times 5 + 20 \times 5 + 3 \times 5$$

La multiplication par un nombre à plu d'un chiffre ne prendra sa place qu'ensuite. On peut passer par une étape intermédiaire, en utilisant un tableau :

x	500	20	3	
5	2500	100	15	2615
20	10000	400	60	10460
				13075

On peut, à titre de découverte culturelle, montrer la technique de multiplication « per gelosia » :

		5	2	3	
	1	0	0		
	0	4	6	2	
2	1	1	5		
5	0	5			
0	7	5			

5 Les problèmes multiplicatifs

5.1 Cardinal d'un produit cartésien

J'ai trois pulls différents et quatre pantalons différents, de combien de manière différentes puis-je m'habiller ?

5.2 Structures rectangulaires

Problème direct de calcul d'aire, mais aussi nombre de cases d'un échiquier, d'un tableau, (carreaux de chocolat, places de parkings, tuiles d'un toit, ...)

S'il y a un produit de mesures (ex. $m \times m = m^2$) c'est plus compliqué.

5.3 Proportionnalité

Un objet coûte 5 €, combien coûtent 18 objets ?

ou, plus compliqué : *un paquet de 4 objets coûte 9 €, combien coûtent 20 objets ?*

La notion sous-jacente est celle de fonction linéaire.

Les deux nombres multipliés n'ont pas des rôles symétriques : $18 \times 5€$ est une réponse normale, $5 \times 18€$ ne l'est pas. L'un des nombres traduit un état, l'autre provoque une transformation de l'état.

6 Les procédures courantes en phase d'apprentissage

Dans un parking il y a 21 rangées de 7 places, combien y a-t-il de places ?

- Comptage : on représente des pièces (dessin plus ou moins organisé) et on dénombre.
- Procédure additive pure : $7+7+\dots+7=$
- Utilisation sauvage de la commutativité : $21 \times 7 = 7 \times 21 = 21+21+21+21+21+21+21$ (plus court à écrire)
- Approche par des multiples connus : $70+70+7$
- Regroupements progressifs par deux : $14+14+14+14+14+14+7=28+28+\dots$
- Utilisation de l'associativité : $7 \times 3 \times 7$
- Utilisation de la distributivité : $20 \times 7 + 7$
- Multiplication posée.
- Calcul mental.