

LA DIVISION

Remarques théoriques

Une loi non interne

L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne dans $\mathbb{N}$: la somme et le produit de deux naturels quelconques sont des naturels.

La soustraction et la division, en revanche ne sont pas des lois internes, le résultat n'appartient pas forcément à $\mathbb{N}$.

Le résultat d'une soustraction peut être un entier relatif négatif. Dans le contexte du problème, l'opération n'est pas toujours "possible".

Le "résultat" d'une division est une notion ambiguë :

Considérons la division de 16 par 3. Suivant le problème posé ¹, l'ensemble de résolution est modifié. Le résultat dans $\mathbb{Q}$ est la fraction $\frac{16}{3}$, le résultat de la division dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est le couple ² constitué du quotient 5 et du reste 1, le résultat dans $\mathbb{D}$ n'existe pas mais on prendra 5,333 ou 5,33.. suivant la précision choisie.

L'addition et la multiplication s'appuient naturellement sur le langage.

La soustraction et la division peuvent prendre des formes plus retorses, car elles procèdent d'addition ou de multiplications à trous.

Exemple : Farid avait 43 billes, il joue et gagne, il en a maintenant 61. Combien en a-t-il gagné ?

Deux types de problèmes

La division sert à résoudre des problèmes de **quotition** ("combien de parts ?" : recherche du multiplicateur) et des problèmes de **partition** ("quelle part pour chacun ?" : recherche du multiplicande).

Exemple : On a acheté pour 18 F de pains au chocolat à 3,60 F l'unité. Combien a-t-on acheté de pains au chocolat ? On a acheté 5 pains au chocolat et on a payé 18 F. Quel est le prix d'un pain au chocolat ?

Deux gestes mentaux opératoires

On peut effectuer une division en cherchant les multiples du diviseur qui encadrent le dividende, ou en partageant le dividende.

Les deux manipulations ne construisent pas le même concept.

¹Pb1 : "on veut partager 16 crayons entre 3 enfants" : réponse dans $\mathbb{N}$.

Pb2 : "On veut partager une ligne de 16 cm en 3 segments de même longueur" : réponse dans $\mathbb{D}$, avec une précision du mm.

Pb3 : "On veut partager 16 F entre 3 enfants" : réponse dans un sous-ensemble de $\mathbb{D}$, celui des sommes réalisables avec nos pièces de monnaie.

Pb4 : "3 pains coûtent 16 F, combien coûtent 25 pains ?" . On a besoin du facteur de proportionnalité exact.

²Cela pose un problème de notation. On a noté, en 1970, $31 : 7 = 4$ (reste 3). Cette notation n'est pas correcte. On ne peut donc écrire une égalité $a : b = \dots$ que si le reste est nul.

Il faut une notation, son absence compliquerait l'apprentissage.

On peut écrire la question : $31 : 7 ?$ et la réponse $q=4, r=3$.

Le sens prédominant du partage

La division "partage" suppose que le diviseur soit un entier non nul strictement inférieur au dividende, et que le diviseur concerne une quantité effectivement morcelable (ou que le reste soit nul).

La division d'un nombre a par un nombre b qui lui est supérieur est mathématiquement réalisable au sens de la division euclidienne : $a = 0 \times b + a$.

Cependant l'opération n'a pas le sens de division dans le cadre de problèmes (Je veux partager 5 bonbons entre 6 enfants, combien chacun en aura-t-il ? ... On ne peut pas).

De même, partager 19 billes entre 4 enfants et partager 19 pommes ou 19 F, ne relèvent pas du même niveau d'abstraction.

Le difficile passage aux décimaux

Le quotient de 34 par 4 est-il 8 ou bien 8,5 ? Le reste est-il 2 ou 0 ?

Alors que les autres opérations ne posent pas de problème nouveau lorsqu'on les prolonge aux décimaux, la division change de nature. Cependant le concept de partage ne change pas. Faut-il enseigner deux divisions ?

Les instructions officielles

Au CE1 : introduction de la multiplication, apparition de quelques multiplications à trous élémentaires du type $5 \times \dots = 45$

Au CE2 : introduction de la proportionnalité, d'où multiplications à trous.

Introduction des notions de reste et de quotient par des situations de distributions.

Encadrement d'un nombre par deux multiples d'un nombre donnés.

Certains auteurs (Retz-Brissiaud) introduisent le signe $\div$.

Technique opératoire de la division lorsque le diviseur n'a qu'un chiffre.

Au CM1 : technique de la division. résolution de problèmes. lien avec la proportionnalité.

Les programmes de 2002 indiquent comme compétence exigible en fin de cycle 3 :

"calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé."

Mais aussi, sous la rubrique "calcul instrumenté" :

"Utiliser une calculatrice pour déterminer la somme, la différence de deux nombres entiers ou décimaux, le produit de deux nombres entiers ou celui d'un nombre décimal par un entier, le quotient entier ou décimal (exact ou approché) de deux entiers ou d'un décimal par un entier."

Cette remarque prend son sens quand on lit ailleurs :

Problèmes relevant des quatre opérations : résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.

Les élèves doivent donc repérer les problèmes relevant de la division, même s'ils ne connaissent pas la technique opératoire de celle-ci dans les cas complexes.

Construire la division

Les situations multiplicatives

Il n'y a pas, au niveau de la construction du sens, de problèmes de multiplication et de problèmes de division, il y a des problèmes multiplicatifs qui relèvent toujours d'une même situation de départ, la proportionnalité.

On a deux nombres (a, b) qui sont proportionnels à deux autres (c, d) , ce que l'on représente par l'écriture :

$$\frac{a}{b} \mid \frac{c}{d}$$

Si $a = 1$ et d est inconnu, il s'agit d'un problème de multiplication simple.

Si $a = 1$ et c est inconnu, il s'agit d'un problème de partition.

Si $a = 1$ et b est inconnu, il s'agit d'un problème de quotition.

Dans les autres cas, il s'agit d'un problème général de quatrième proportionnelle.

Éviter les conflits...

L'apprentissage de la division relève de deux grands gestes mentaux :

- le groupement (le quotient et le reste sont obtenus en encadrant le dividende par deux multiples du diviseurs)
- le partage (le quotient et le reste sont obtenus par découpage des centaines, des dizaines...)

Considérons ces quatre problèmes :

- Pb1 : On dispose de 163 fleurs et on fait des bouquets de 25 fleurs.
Combien peut-on faire de bouquets ? Combien reste-t-il de fleurs ?
- On dispose de 163 fleurs et on les partage équitablement entre 25 personnes.
Combien de fleurs chacune obtiendra-t-elle ? Restera-t-il des fleurs ?
- Pb2 : On dispose de 637 fleurs et on fait des bouquets de 3 fleurs.
Combien peut-on faire de bouquets ? Combien reste-t-il de fleurs ?
- On dispose de 637 fleurs et on les partage équitablement entre 3 personnes.
Combien de fleurs chacune obtiendra-t-elle ? Restera-t-il des fleurs ?

Si le quotient est à un chiffre, on a avantage à effectuer directement des regroupements :
ex. $(163 : 25)$ on repère les 6 groupements de 25.

$(637 : 3)$ on a intérêt à décomposer : on donne déjà 200 fleurs à chacun, puis 10 fleurs ...

Pb	type	représentation économique	calcul économique
1	quotition	groupement	groupement
2	partition	partage	groupement
3	quotition	groupement	partage
4	partition	partage	partage

Pour les problèmes 1 et 4 il n'y a pas de conflit entre la représentation et le calcul économiques. Si l'enseignant commence par ces problèmes, il installe sans difficulté l'un des deux gestes mentaux. La situation de partage est la plus facile à repérer comme relevant de la division. L'enseignant peut faire le choix d'en profiter pour commencer par elle ou non.

Le geste mental du partage, éventuellement relayé par un dispositif de type picbille, permet l'introduction de la technique opératoire avec la potence.

Exemple : On veut partager 250 billes entre 8 enfants : On partage les 25 dizaines, chacun en aura 3 et il en restera une, ... D'où la notation :

250	8	
-24 .	3×8	3 dizaines
1 .		
10		
-8	1×8	1 unité
2		31

On pourra préalablement utiliser une technique moins élaborée sur le principe du partage. J'ai 250 billes, si j'en donne déjà 10 à chacun, j'en utilise 80 et il en reste 170. Je peux en donner 10 à chacun, ...

On aurait ainsi une disposition du type :

250		
	$10 \times 8 = 80$	
170		10
	$10 \times 8 = 80$	
-80		
90		10
	$10 \times 8 = 80$	
-80		
10		10
	$1 \times 8 = 8$	
-8		
2		1
		31

On peut envisager une autre stratégie (ERMEL) : l'enseignant valorise la procédure par essais de multiples, au détriment des procédures additives.

Au CM1, on travaille sur des situations problèmes relevant des questions "Combien de fois ?" et "Combien à chaque fois ?"

Pour diviser 250 par 8, on procédera empiriquement ainsi : $10 \times 8 = 80$ et $100 \times 8 = 800$. Donc le quotient est compris entre 10 et 100. C'est un nombre à deux chiffres.

On cherche un multiple de 8 proche de 250. Par exemple 240 qui est aisément repérable, et on construit la table à partir de là : $30 \times 8 = 240$, $31 \times 8 = 248$, $32 \times 8 = 256$, c'est trop ... D'où le résultat.

Le document d'accompagnement des programmes de 2002, en 2003, donne les recommandations suivantes :

Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes.

En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire.

Ainsi, diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer 1538 en $1\ 400 + 148$, après avoir repéré que 1400 est divisible par 7 (200), puis 148 en $140 + 8$ pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1). Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : $200 + 20 + 1 = 221$.

La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté.

Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :

- commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient)
- s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée)
- encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).

... La technique « dépouillée » de la division n'est pas une compétence visée, ni à l'école primaire, ni au collège.

Procédures

On veut ranger 78 œufs dans des boîtes de 6...

- Procédures imagées (on dessine les œufs puis les boîtes, ou des boîtes puis des œufs, ou des boîtes en notant 6 à l'intérieur... Avec des versions évoluées : regroupements de boîtes ou distribution de plusieurs œufs...)
- Procédures additives :
 - Sommes de termes égaux au diviseur, ou à des multiples du diviseur
 - Soustraction progressive du diviseur, ou de multiples du diviseur.
- Procédures multiplicatives :
 - Recherche systématique des multiples du diviseur dans le sens croissant (on écrit la table du diviseur jusqu'à dépasser le dividende). (risque d'erreur : on oublie d'enlever 1)
 - Idem mais avec groupements de dizaines du diviseur (par exemple).
 - Retour à la multiplication à trou (procédure performante si cela tombe juste).
 - Procédure par essais de différents multiples, d'après l'ordre de grandeur.
- Procédures mixtes : utilisant les multiples et la soustraction. ($5 \times 12 = 60$; $78 - 60 = 18$; $5 \times 3 = 15$...)
- Division posée, avec écriture parallèle des calculs intermédiaires : essais de multiplications et soustractions.
- Division posée avec les soustractions.
- Division posée "experte".

Variables didactiques

- La taille des nombres. (de chacun et de l'un par rapport à l'autre)
- La nullité ou la non nullité du reste.
- Les nombres (pairs, multiples de 5, de 10, carré parfait...)
- Les outils de calcul
- La situation problème : partition ou quotition.