

ARITHMETIQUE

Arithmétique : partie des mathématiques qui étudie les propriétés et les relations élémentaires sur les ensembles des entiers (naturels et relatifs) et des nombres rationnels.

« La mathématique est la reine des sciences, l'arithmétique est la reine de la mathématique », Karl Friederich GAUSS (1777 – 1855), mathématicien allemand.

1. Multiples et diviseurs

1.1. Définitions

L'entier naturel a est un **multiple** de l'entier naturel b s'il existe un entier naturel k , tel que : $a = k \times b$.

- a est aussi multiple de k ;
- a est multiple de 1 ;
- 0 est multiple de tout entier.

L'entier naturel b est un **diviseur** de l'entier naturel a si a est un multiple de b .

- 1 est diviseur de tout entier ;
- a est diviseur de lui-même.

Tout entier naturel $N \geq 2$ admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

1.2. Propriétés

Si a et b sont multiples de c , alors $a + b$ est multiple de c .

Si a est un multiple de b , et b est un multiple de c , alors a est multiple de c .

1.3. Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par ...	... si ...	Exemples
2	son chiffre des unités est pair	1 453 688
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3	546 381
4	le nombre formé de ses deux dernières décimales est divisible par 4	1 345 648
5	le chiffre des unités est 0 ou 5	435 ; 2 390
6	le nombre est divisible par 2 ET par 3	396 ; 1 704
8	le nombre formé de ses trois dernières décimales est divisible par 8	2 568
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9	546 381
10	le nombre se termine par 0	234 567 890

Quelques démonstrations :

Divisibilité par 5 :

$$N = \overline{mcd u} ; \overline{mcd u} = 1\,000m + 100c + 10d + u = 5 \times (200m + 20d + 2d) + u.$$

Ainsi le nombre N est divisible par 5 si le chiffre des unités u l'est, autrement dit si le chiffre des unités est 0 ou 5.

Divisibilité par 4

$$N = \overline{mcd u} ; \overline{mcd u} = 1\,000m + 100c + 10d + u = 4 \times (250m + 25c) + 10d + u.$$

La somme $4 \times (250m + 25c)$ est divisible par 4 ; ainsi la somme $4 \times (250m + 25c) + 10d + u$ est divisible par 4 si la somme $10d + u$ l'est. Autrement dit, un nombre est divisible par 4 si le nombre formé des deux dernières décimales l'est.

1.4. Division euclidienne

Soient a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique entier naturel q , tel que : $q \times b \leq a < (q + 1) \times b$.

Cet entier q est le **quotient** de la division euclidienne de a par b .

L'entier $r = a - q \times b$ s'appelle le **reste** de la division euclidienne. On a toujours $r < b$.

L'entier naturel a est le **dividende**, le naturel b est le **diviseur**.

Exemple : $a = 63$, $b = 4$; ainsi $15 \times 4 \leq 63 < 16 \times 4$.

D'où $q = 15$, $r = 63 - 15 \times 4 = 3$. Ainsi $63 = 15 \times 4 + 3$.

Démonstration de l'unicité du couple $(q ; r)$

Supposons qu'il existe un couple $(q' ; r')$ qui convienne également ; on aurait : $a = b \times q + r = b \times q' + r'$.

Ainsi $b \times (q - q') = r' - r$. Comme $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$, on a $r' - r$ compris strictement entre $-b$ et b .

Le seul multiple de b compris strictement entre $-b$ et b est 0. Ainsi $q - q' = r' - r = 0$.

2. Nombres premiers

2.1. Définition

Un entier naturel est un nombre premier s'il a **exactement** deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1 n'est donc pas premier !

Exemples : 2 ; 5 ; 11 ; ...

Remarques : 2 est l'unique nombre premier pair

2.2. Crible d'Eratosthène

Pour établir si un entier naturel N est premier, il faut tester tous les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.

Démonstration

Si N est divisible par 6, il est aussi divisible par 2 et 3 : il suffit donc de tester les diviseurs premiers.

D'autre part, si N est divisible par un entier P supérieur à $\sqrt{N}$, on a $N = P \times Q$ et Q est inférieur à $\sqrt{N}$ (sinon $P \times Q$ serait supérieur à $\sqrt{N} \times \sqrt{N} = N$).

Ainsi il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.

Le crible d'Eratosthène est un algorithme permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs à 100 (Eratosthène de Cyrène (-276 ; -194), mathématicien grec de l'école d'Alexandrie).

On raye successivement de la grille : 1, qui n'est pas premier, puis tous les nombres pairs hors mis 2, puis tous les multiples de 3 hors mis 3, puis tous les multiples de 5 excepté 5, et enfin tous les multiples de 7 autres que 7. Il n'est pas utile d'essayer 11 qui est supérieur à la racine carrée de 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les nombres non barrés sont donc les nombres premiers : il y en a 25.

Activité :

Paul doit décomposer en produit de facteurs le nombre $N = 420$ en faisant apparaître le plus de facteurs possible, autres que 1.

Il a trouvé $N = 42 \times 10$: peut-on proposer un produit plus développé ?

2.3. Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout entier naturel admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers.

Elle est de la forme : $N = A^a \times B^b \times C^c \times D^d \times \dots$ où $A, B, C, D, \dots$ sont premiers.

Exemple : $180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2^2 \times 3 \times 15 = 2^2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Disposition pratique de détermination :

180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		/

Infinitude de l'ensemble des nombres premiers

L'ensemble des nombres premiers est infini, i.e. il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration par l'absurde

Supposons que l'ensemble des nombres premiers soit fini et notons $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ les nombres premiers de cet ensemble ($p_1 = 2 ; p_2 = 3 ; \dots$).

Le nombre $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$, produit de tous les nombres premiers augmenté de 1, est divisible par un nombre premier p_i (d'après la propriété de décomposition en produit de facteurs premiers). Ainsi,

$N = p_i \times (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times \dots \times p_n) + 1$. Autrement dit, le reste de la division euclidienne de N par p_i vaut 1 : N n'est pas divisible par p_i , quel que soit i entier compris entre 1 et n (c'est en fait un nouveau nombre premier !). On aboutit à une contradiction, ce qui prouve que l'hypothèse de départ était fausse.

2.4. Diviseurs d'un entier naturel

Formule d'Euler

Si la décomposition d'un entier naturel N est $N = A^a \times B^b \times C^c \times D^d \times \dots$, où $A, B, C, \dots$ sont premiers,

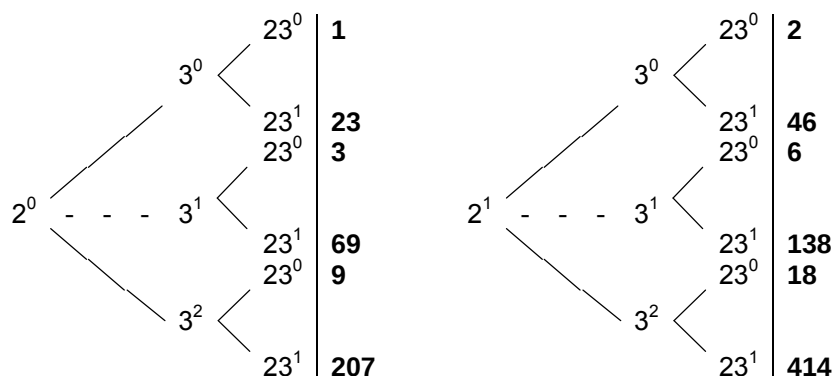
alors N a exactement $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \dots$ diviseurs.

Pour trouver tous les diviseurs d'un entier naturel, on commence par décomposer celui-ci en produit de facteurs premiers.

Exemple : $414 = 2 \times 3^2 \times 23$

Tous les diviseurs de 414 sont alors de la forme $N = 2^a \times 3^b \times 23^c$, avec les conditions : $0 \leq a \leq 1 ; 0 \leq b \leq 2 ; 0 \leq c \leq 1$, a, b et c entiers.

En utilisant l'arbre des diviseurs de 414, on obtient tous ses diviseurs.



2.5. PGCD et PPCM de deux entiers naturels

Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) et le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de deux entiers naturels sont obtenus à partir des décompositions en produit de facteurs premiers.

Exemple :

Détermination du PGCD et du PPCM de 396 et 88 : $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$ et $88 = 2^3 \times 11$.

Les diviseurs de 396 sont de la forme $2^a \times 3^b \times 11^c$, $0 \leq a \leq 2$; $0 \leq b \leq 2$; $0 \leq c \leq 1$;
ceux de 88 sont de la forme $2^p \times 11^q$, avec $0 \leq p \leq 3$ et $0 \leq q \leq 1$.

Les diviseurs **communs** à 396 et 88 sont les nombres de la forme

$$N = 2^x \times 11^y, \text{ avec } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 1.$$

Le plus grand des diviseurs est obtenu lorsque $x = 2$ et $y = 1$.

Ainsi, $\text{PGCD}(396 ; 88) = 2^2 \times 11^1 = 44$.

Les multiples de 396 sont de la forme $k \times 2^2 \times 3^2 \times 11$, k entier naturel.

Ceux de 88 sont de la forme $l \times 2^3 \times 11$.

Les multiples **communs** à 396 et 88 sont de la forme $m \times 2^3 \times 3^2 \times 11$ (on prend tous les nombres premiers apparaissant dans les deux décompositions et leur exposant le plus grand).

Le plus petit est obtenu pour $m = 1$. Ainsi, $\text{PPCM}(396 ; 88) = 2^3 \times 3^2 \times 11 = 792$.

Exercice :

Déterminer le PGCD des entiers 294 et 605. $294 = 2 \times 3 \times 7^2$; $605 = 5 \times 11^2$.

$\text{PGCD}(294 ; 605) = 1$.

Remarques :

A et B désignent deux entiers naturels,

- **si** $\text{PGCD}(A ; B) = 1$, **alors** A et B sont dits **premiers entre eux** ;
- $\text{PGCD}(A ; B) \times \text{PPCM}(A ; B) = A \times B$;
- **si** a divise $b \times c$ **et** si a est premier avec b (i.e. $\text{PGCD}(a ; b) = 1$), **alors** a divise c.