PROPORTIONNALITE

1 Un peu d'histoire

L'enseignement de la proportionnalité a beaucoup évolué depuis cinquante ans. Jusqu'en 1945, les diverses classes de problèmes (pourcentages, alliages, intérêts, rentes, règle de trois…) étaient des objets d'enseignement séparés. Après 1945, la règle de trois règne en maître(sse), mais cela ne satisfait pas vraiment les mathématiciens car l'algorithme passe avant la notion mathématique. Progressivement la notion de fonction linéaire s'installe.

2 Définitions

La notion de proportionnalité met en œuvre différents cadres : celui des fonctions, des tableaux de proportionnalité, des représentations graphiques, des figures géométriques (notion d'agrandissement, de réduction).

Une fonction est dite **linéaire** si elle s'exprime sous la forme : $f(x) = kx$, où k est un réel quelconque.

Deux suites $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x\}$ et $\{y_1, y_2, y_3, \ldots y_n\}$ de nombres sont proportionnelles si

- il existe une fonction linéaire f telle que pour toutes les valeurs de l'indice, $y_p = f(x_p)$.
- dans un repère[1] les points de coordonnées $M_p(x_p,y_p)$ appartiennent à une droite passant par l'origine.
- dans un tableau, on passe de la ligne (resp. colonne) des x à la ligne (resp. colonne) des y par un opérateur multiplicatif.

remarques

- $\{0, 0, \ldots, 0\}$ est proportionnelle à toute suite de n éléments, avec k = 0.
- En dehors de ce cas, si la suite $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x\}$ est proportionnelle à la suite $\{y_1, y_2, y_3, \ldots y_n\}$, alors $\{y_1, y_2, y_3, \ldots y_n\}$ est proportionnelle à $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x\}$.
- $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x\}$ est proportionnelle à elle-même, avec un coefficient k = 1.
- Si deux suites ne comportent qu'un seul terme, elles sont proportionnelles.

3 Propriétés

3.1 Cadre des fonctions

Une fonction linéaire vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = af(x)$
3. $f(x+a) - f(x)$ ne dépend que de a. (propriété des écarts).

Cette dernière propriété n'est pas caractéristique des fonctions linéaires. Les fonctions affines la possèdent aussi.

On peut démontrer que :

- Si f est une fonction qui possède les propriétés 1 et 2, f est linéaire.
- Si f possède la propriété 3 et si $f(0)=0$, f est linéaire.

4. $f(x)/x = k$ (si x ý 0)
5. $yf(x) = xf(y)$

remarque

$$f(x \times y) \neq f(x) \times f(y)$$

[1] pas forcément orthogonal

3.2 Cadre des tableaux

Propriété 1 : si on additionne deux cases d'une ligne, on peut additionner les deux cases en face.

$x1$	$x2$		$x1+x2$
$y1$	$y2$		$y1+y2$

Propriété 2 : si on multiplie une case d'une ligne, on peut multiplier la case en face.

x			$k.x$
y			$k.y$

Propriété 3 : à des écarts égaux sur une ligne, correspondent des écarts égaux de l'autre ligne.

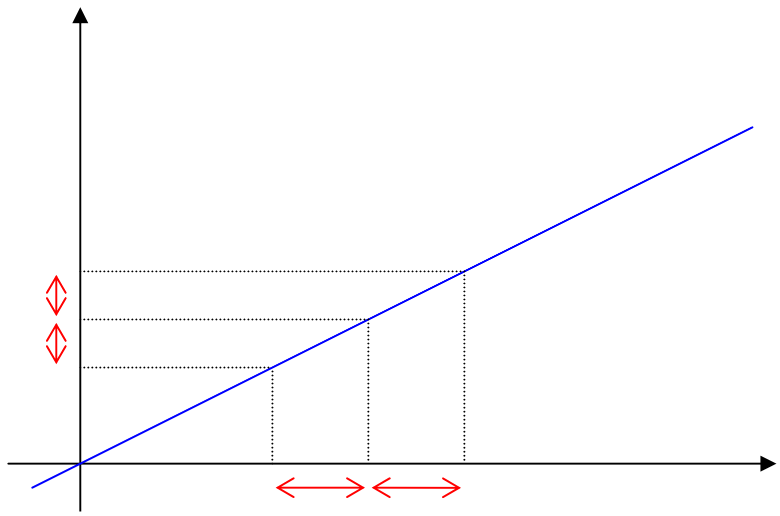
Propriété 4 : Si aucune des valeurs x_p n'est nulle, tous les quotients $\frac{y_p}{x_p}$ sont égaux.

Propriété 5 : le "produit en croix" : $xy' = x'y$

x	x'		
y	y'		

3.3 Cadre des représentations graphiques

Propriété 3 : illustration graphique.



Les mêmes écarts sur l'axe des abscisses corespondent aux mêmes écarts sur l'axe des ordonnées.

Propriété 4 : le quotient $\frac{y_p}{x_p}$ est le coefficient directeur de la droite.

4 Les problèmes types

4.1 Recherche d'une quatrième proportionnelle

6 boîtes de peinture coûtent 45€, combien coûtent 9 boîtes ?
Ce problème se schématise par :

6	9
45	?

Procédures possibles :

- On cherche le coefficient de proportionnalité :

k = ?

6	*9*
45	*?*

45 = 6×k, donc k = 45/6 = 7,5. Donc 9×k = 67,5.

- On passe par l'unité : combien coûte une boîte…

:6 ×9

6	*1*	*9*
45	*?*	*?*

- On utilise un intermédiaire pertinent (notion de PGCD) : le prix de trois boîtes

:2 ×3

6	*3*	*9*
45	*?*	*?*

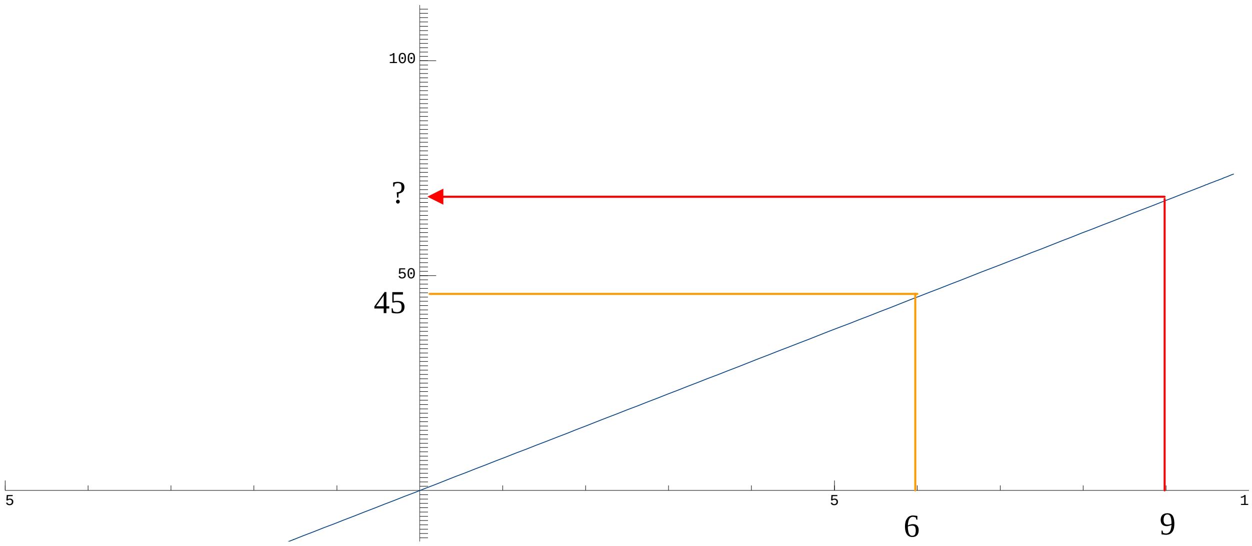
- On trouve directement le passage de 6 à 9 :

×1,5

6	*9*
45	*?*

- Utilisation du produit en croix : 6p = 9×45 donc p =9×45/6 = 67,5

- Résolution graphique :



4.2 Comparaison de proportions

Jean a mélangé 2 litres d'eau et 25g de sucre. Pierre a mélangé 4,5 litres d'eau et 55g de sucre. Lequel des deux mélanges est-il le plus sucré ?

Procédures possibles :

- Comparer les opérateurs de proportionnalité :

$\times 12{,}5$

2	*4,5*
25	*55*

$\times 12{,}22$

- Comparer les deux mélanges pour un litre (Comparaison des densités) :

2	*1*
25	*12,5*

4,5	*1*
55	*12,22*

- Comparer les deux mélanges pour une quantité commode (notion de PPCM) :

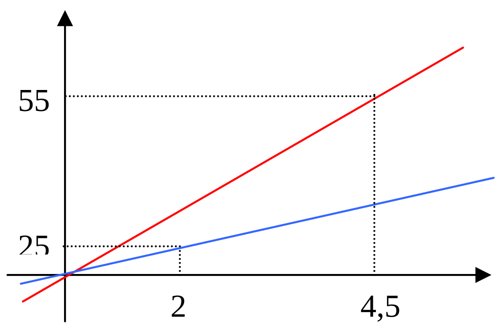
$\times 9$

2	*18*
25	*225*

$\times 4$

4,5	*18*
55	*220*

- Calcul d'une quatrième proportionnelle pour l'un des deux cas et comparaison avec la donnée de l'énoncé :
  Si le sirop de Pierre était aussi sucré que celui de Jean, il y aurait x grammes de sucres dans les 4,5 litres, avec $2 \times x = 25 \times 4{,}5$, d'où $x = 56{,}5$, or $x = 55$ donc le sirop de Jean est plus sucré.
- Solution graphique : comparaison des pentes des droites. (peu performante dans le cas présent)



4.3 Problèmes de double proportionnalité

8 chèvres broutent 18 m² en 3 heures. Quelle superficie brouteront 6 chèvres en 12 heures ?

Le problème se résume par le tableau :

8	*6*
3	*12*
18	*?*

Procédures possibles :

- Retour à l'unité : la capacité de broutage horaire d'une chèvre : $\frac{18}{8\times3} = \frac{3}{4}$ m².
- Passage par un intermédiaire : la capacité de broutage de deux chèvres en 3 heures.
- Passage à l'unité dans une ligne, puis dans une autre :

$\times$0,75 en haut

8	6
3	3
18	13,5

$\times$ 4 en bas

6	6
3	12
13,5	54

- Décomposition du problème en deux sous-problèmes : superficie broutée par 8 chèvres en 12 heures, puis par 6 chèvres en 12 heures.
- Composition des opérateurs : $\times$ 0,75 $\times$ 4 = $\times$3

4.4 Problèmes de proportionnalité inverse

Un cycliste A parcourt un circuit à 24 km/h en 30 mn, un cycliste B parcourt le même circuit en 45 mn, quelle est sa vitesse ?

Procédures possibles :

- Calcul de la distance et conversion des minutes en heures : d = 24×0,5 = 12 km.

D'où v'= 12/0.75= 16 km/h.

- Utilisation du tableau en considérant les opérateurs dans l'autre sens :

$\times$ 1,5

24	?
30	45

$\times$ 1,5

Il n'y a plus de produit en croix, mais un produit en colonne : 24×30 = 45×v

4.5 Problèmes de composées de proportionnalités

Avec un plateau de 42 dents et un petit: pignon de 18 dents, un cycliste parcourt 7 m par tour de pédale. Combien parcourt-il avec un grand plateau de 52 dents et un petit pignon de 12 dents ?

5 Les classes de problèmes

énoncé 1 : Thierry et son père font une promenade à pied. Thierry remarque qu'il doit faire 18 pas lorsque son père en fait quinze. Combien de pas Thierry devra-t-il faire lorsque son père en fera 900 ?

énoncé 2 : Pour Noël, j'achète des chocolats fins au poids. Je paie 5,4 € pour 450 g. Quel est le prix de ces chocolats aux 100 g ?

énoncé 3 : Pierre veut faire de la menthe à l'eau. Il met 2 verres de sirop dans 7 verres d'eau. Combien devra-t-il mettre de verres de sirop dans 42 verres d'eau ?

énoncé 4 : Pierre veut faire de la menthe à l'eau. Il met 2 verres de sirop pour 9 verres de mélange. Combien devra-t-il mettre de verres de sirop pour 54 verres de mélange ?

énoncé 5 : Pour Noël, j'achète des chocolats fins au poids : 2,4 € les 100g. Combien paierai-je si j'en achète 250g ?

Dans **l'énoncé 1**, les nombres sont entiers et relativement petits, mais les grandeurs en jeu sont de même nature et ne facilitent pas le tri des données. Tous les nombres sont sans dimension. Le rapport de 15 à 900 est inaccessible à la représentation. On préférera sans doute quand même ce rapport, qui est entier, (ou qui risque de l'être) au rapport de 15 à 18 qui ne l'est sûrement pas.

Dans l'**énoncé 5**, les grandeurs sont de nature différentes (g et €), ce qui facilite le tri des données. Le rapport de 250 à 100 est familier et sera privilégié.

L'énoncé 2 laisse plus d'ouverture aux procédures possibles. Il ne s'agit plus de calculer une quatrième proportionnelle mais de comparer.

On peut classer les problèmes suivant qu'ils font appel à deux grandeurs ou non.

5.1 problèmes à deux grandeurs

<u>les grandeurs sont de natures différentes :</u>
ex. énoncé 2. Le tri des données est facilité, la reconnaissance de la structure aussi.
<u>les grandeurs sont de même nature :</u>
ex. énoncé 1.
On peut distinguer plusieurs cas de figure :

- ➔ l'une des grandeurs est incluse dans l'autre (problème partie-tout).(énoncé 4)
- ➔ les deux grandeurs sont indépendantes (énoncé 1)
- ➔ les deux grandeurs sont constitutives d'une troisième grandeur qui n'intervient pas. (énoncé 3)

6 Les programmes

Dans « Qu'aprend-on à l'école élémentaire », page 224 :

> Des situations relevant de la proportionnalité sont proposées et traitées en utilisant des raisonnements personnels, adaptés aux données en jeu dans la situation et aux connaissances numériques des élèves (voir les exemples fournis dans le document d'application). Les élèves distingueront ces situations de celles pour lesquelles ces raisonnements ne sont pas pertinents (situations de non-proportionnalité). Ces procédures de résolution concernent également les problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes et aux conversions entre unités de longueur, de masse, de contenance, de durée ou d'aire qui trouvent leur place sous cette rubrique. À partir de cette première approche dont l'importance ne doit pas être sous-estimée, l'étude organisée de la proportionnalité sera mise en place au collège.

Dans le document d'accompagnement, on a :

> L'étude de la proportionnalité pour elle-même relève du collège. À l'école primaire, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif. Ces problèmes sont traités en s'appuyant sur des raisonnements qui peuvent être élaborés et énoncés par les élèves dans le contexte de la situation.

Par exemple pour le problème « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ? », les raisonnements peuvent être du type :
– pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) et pour 200 g de fruits (2 fois moins que 400), il faut 40 g de sucre (2 fois moins que 80). Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
– la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).

Dans certains cas, le passage par l'unité est nécessaire. Par exemple, pour résoudre le problème «2 cm sur le papier représentent 5 km sur le terrain. La distance à vol d'oiseau entre deux villes est de 7 cm. Quelle est la distance réelle ? », le raisonnement peut être du type :
1 cm sur le papier représente 2,5 km (deux fois moins que 2 cm), donc 7 cm sur le papier représentent 17,5 km (sept fois plus que 1 cm) ou 6 cm + 1 cm correspond à 15 km + 2,5 km.

La mise en oeuvre de ces raisonnements suppose que l'élève ait identifié qu'ils étaient pertinents pour la situation proposée. Si un seul couple de nombres en relation est fourni (par exemple, «6 objets coûtent 15 euros, combien coûtent 9 objets ? »), il doit faire appel à des connaissances sociales (la relation entre quantité et prix est souvent une relation de proportionnalité). En revanche, la donnée de deux couples de nombres (ou plus) en relation lui permet d'inférer la relation de proportionnalité (par exemple, « pour 50 g de chocolat, il faut 10 g de sucre et pour 100 g de chocolat, il faut 20 g de sucre ; combien faut-il de sucre pour 325 g de chocolat ?).

Dans d'autres cas, le recours à une expérience effective peut être un moyen de vérifier la relation de proportionnalité entre les grandeurs en jeu : par exemple, relation entre quantité de liquide et hauteur atteinte dans un verre cylindrique, relation entre longueurs du côté et de la diagonale d'un carré.
Des activités de placement de nombres sur une droite partiellement graduée sont également l'occasion d'utiliser ce type de raisonnement: par exemple, placement de 50 et 500 sur une droite où sont déjà placés 0 et 200. La graduation des axes d'un graphique pour représenter des couples de données fournit des occasions d'un tel travail.

Il est important que soient proposées aussi bien des situations qui relèvent de la proportionnalité que des situations qui n'en relèvent pas.
Dans tous les cas, on s'appuiera sur des situations concrètes (par exemple, sur des expériences en lien avec le programme de sciences comme l'étalonnement d'un verre doseur conique comparé à un verre doseur cylindrique)
L'utilisation de tableaux de nombres ou de graphiques permet d'organiser des informations dans de nombreuses situations. Ces outils ne doivent pas être associés systématiquement à la proportionnalité.
Les situations faisant intervenir des pourcentages, des échelles, des vitesses moyennes, des conversions d'unités sont traitées avec les mêmes procédés. Aucun procédé expert n'a à être enseigné à ce niveau : ceux-ci seront étudiés en 6e et 5e, au collège.
La touche «%» de la calculatrice n'est donc pas utilisée au cycle 3.

Par exemple, si on sait que sur 350 élèves, 40 % mangent à la cantine, l'élève peut s'appuyer sur un raisonnement du type :

> pour 100 élèves, 40 mangent à la cantine ;
> pour 300 élèves (3 fois plus), 120 mangent à la cantine (3 fois plus) ;
> pour 50 élèves (moitié de 100), 20 mangent à la cantine (moitié de 40);
> pour 350 élèves (300 + 50), ce sont donc 140 élèves qui mangent à la cantine (120 + 20).

Les quelques conversions d'unités envisagées seront aussi reliées à la proportionnalité : par exemple, pour convertir 43 dm^2 en cm^2, l'élève peut utiliser le fait que 1 dm^2 = 100 cm^2 ; 43 dm^2, c'est donc 4300 cm^2 (43 fois 100 cm^2).