

Construction du nombre chez l'enfant

1 Qu'est-ce qu'un nombre ?

1.1 Un concept abstrait

La chaise a quatre pieds, la voiture a quatre roues, si je ne regarde pas mon pouce, ma main a quatre doigts, j'ai quatre posters de Zidane. . . Les différents ensembles évoqués (les pattes de la vache, les roues de la voiture, les doigts de la main sans le pouce, les posters de Zidane) sont équipotents, c'est à dire équivalents par rapport au critère « nombre d'éléments ». De ce seul point de vue, en évoquer un est identique à en évoquer un autre : on peut montrer sur ses doigts le nombre de pattes de la vache. Cette propriété commune, c'est le nombre quatre.

Le nombre permet de s'abstraire de la réalité. Couper un pied à la chaise, baisser un doigt ou perdre un poster ne sont pas des situations concrètes équivalentes, mais en ce qui concerne le cardinal de l'ensemble, elles se traduisent par la même opération : $4 - 1 = 3$. L'enfant ne peut construire le nombre sans adhérer à ce principe d'abstraction : ce qu'il peut vérifier sur une collection témoin est le reflet fidèle de ce qui se passe pour une collection de même cardinal subissant les mêmes transformations.

1.2 Chiffres et nombres

Dans le langage commun, on confond souvent les deux termes : « les chiffres du chômage » . . .

Le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot : un caractère constituant, un symbole d'écriture. De même qu'il y a des mots à une lettre (ceux qui interviennent justement dans « il y a »), il y a des nombres à un chiffre.

Le même chiffre peut représenter des nombres différents quand on change de base : dans 25_{six} , le 2 indique la présence de deux sixaines et non de deux dizaines. Il est donc impropre de lire 25_{six} « vingt-cinq en base six », il faut lire « deux cinq en base six ».

2 Un peu d'histoire

2.1 Quelques repères historiques

Entre 1945 et 1970 : dans les commentaires du programme de CP de 1945, on trouve "l'apprentissage des nombres doit se faire par l'observation de collections d'objets simples. . .". A l'école maternelle, on présente les nombres les uns après les autres, à l'aide de constellations diverses, avec ses décompositions et son écriture. On confond volontiers le nombre concret (5 doigts) et le nombre lui-même.

À partir de 1970, la réforme des "maths modernes" conduit à introduire le "nombre naturel". "Il est important de comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété associée à des objets, mais une propriété associée à des ensembles." (I.O. 1970).

"L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre.." Les activités de classement sont pratiquées à l'école maternelle afin de favoriser l'émergence de ce concept. En revanche, on ne cherche plus à apprendre à compter à l'école maternelle.

Actuellement, on considère que les connaissances mathématiques prennent d'abord du sens dans les problèmes qu'elles permettent de résoudre efficacement. On exploite davantage ce que les enfants savent déjà.

2.2 La dialectique outil-objet

Les nombres sont, tour à tour, des outils pour résoudre des problèmes (j'avais 35 billes, j'en ai maintenant deux fois plus..), et des objets d'étude en eux-mêmes (7 est un nombre premier...). L'utilisation de l'outil permet de construire le concept et donc d'approfondir la connaissance de l'objet. Inversement la connaissance de l'objet favorise son utilisation en tant qu'outil. C'est le principe de la Dialectique Outil Objet de Régine Douady.

2.3 Les programmes

À l'école maternelle

Classification et sériation : l'enfant découvre et organise les relations logiques en travaillant sur des séries d'objets.

Approche du nombre :

- La perception de la quantité n'est pas, a priori, numérique.
- On installe :
 - ▷ L'estimation relative (plus, moins, autant)
 - ▷ L'estimation par subitizing (perception instantanée)
 - ▷ La comparaison à des collections naturelles (les doigts de la main)
 - ▷ La fixation et l'extension de la comptine numérique
 - ▷ Le dénombrement à l'aide de la comptine
- Approche de la fonction "calcul" du nombre par des petits problèmes d'addition et de soustraction.
- Approche de l'aspect ordinal à l'aide de la comptine.

À l'école élémentaire, cycle 2

- Compter jusqu'à 1000 : dénombrer une collection, coder en décimal.
- Découverte de la numération décimale.
- Maîtrise de l'addition.
- Approche de la multiplication et de la soustraction, tables de multiplication.
- Recherche du double, de la moitié.
- Comparaison d'entiers : $<$, $>$, $=$.
- Problèmes simples.

À l'école élémentaire, cycle 3

- Numération décimale.
- Ordre sur les naturels.
- Relations arithmétiques simples (doubles, tiers...)
- Techniques opératoires de la soustraction et de la division.
- Pratique du calcul approché, notion d'ordre de grandeur.
- Utilisation de la calculatrice.
- Fractions simples.
- Nombres décimaux.

3 L'apprentissage des nombres

3.1 La question du sens : à quoi servent les nombres ?

On peut mettre en évidence deux grandes classes d'usage des nombres :

- conserver la mémoire de la quantité,
- anticiper le résultat de certaines actions sur les quantités.

Dans les deux cas, il est clair que les nombres n'ont d'intérêt que dans la mesure où il s'agit de quantités que l'on ne peut pas manipuler directement. Les manipulations d'objets réels ne favorisent pas l'utilisation des nombres, elles permettent au contraire de s'en passer. Elles sont cependant essentielles dans un premier temps, pour amener l'enfant à bien comprendre la situation qui lui est proposée.

Il n'y a résolution mathématique que s'il y a anticipation sur l'action, Celle-ci n'est possible que si la situation évoquée a du sens pour l'enfant (faire appel au souvenir d'une situation réelle proche), qu'à l'aide des sollicitations du maître d'où l'importance du choix des situations.

Piaget supposait en 1941 que trois capacités étaient prérequis pour l'apprentissage des nombres ¹ :

- la conservation numérique (comprendre que X X X X et X X X X, c'est autant de X),
- la sériation des longueurs (pouvoir ranger des réglettes par ordre croissant de taille)
- l'inclusion des classes (y a-t-il plus de fleurs ou de tulipes dans le bouquet ?)

3.2 Deux conceptions majoritaires de l'apprentissage

Depuis 1990 deux conceptions de l'apprentissage du calcul s'affrontent :

- Conception ERMEL : les progrès des enfants s'expliquent par une amélioration des procédures de comptage. Il faut savoir compter pour savoir calculer. "il y a quatre pommes car il y en a 1, 2, 3, 4."

¹ Il semble qu'il se trompait, l'enfant raisonne beaucoup à partir d'une perception globale de la forme.

- Conception Brissiaud : les progrès proviennent de procédures de calcul "il y a quatre pommes car il y en a $2+2$."

3.3 Des problèmes pour utiliser les nombres

Plusieurs types de problèmes peuvent être utilisés pour permettre aux enfants d'utiliser les nombres

- des problèmes mettant en jeu deux collections A et B ; il s'agit alors de
 - ▷ comparer les cardinaux des deux collections.
 - ▷ réaliser une collection B qui doit avoir autant d'éléments que la collection A.
 - ▷ réaliser une collection B qui doit être double, triple,... de la collection A.
 - ▷ compléter une collection B pour qu'elle soit équipotente à A.
- des problèmes de repérage (se situer) dans une suite de cases sur une ligne (type jeu de l'oie) (aspect ordinal)
- des problèmes d'anticipation d'un résultat (problèmes qui seront traités plus tard par le recours aux opérations classiques) :
 - ▷ déplacement sur une piste graduée : où arrive-t-on si on avance de n cases ?
 - ▷ réunion de deux collections : quelle quantité obtenue, combien ajouter pour obtenir la quantité souhaitée...
 - ▷ collection disjointe en deux sous-collections : prévoir les répartitions possibles, trouver la quantité d'une sous-collection connaissant la quantité de l'autre...
 - ▷ partage en sous collections équipotentes : distribuer en n parts, combien de parts si chacune contient n
 - ▷ échanges : 1 contre 3..,

3.4 Des procédures pour résoudre ces problèmes

(par un enfant n'ayant pas à sa disposition les outils experts).

- *Correspondance terme à terme* : appariement des objets des deux collections : la technique de mise en relation dépend de la nature des objets, de la proximité des collections, de la mobilité des objets, de la quantité d'objets,...
- *Correspondance paquet par paquet* : fabrication préalable de sous-collections : ce sont ces sous-collections qui sont mises en correspondance terme à terme,
- *Estimation* soit évaluation approximative, soit subitizing (reconnaissance immédiate de la quantité sans dénombrement explicite (possible pour petites quantités ou configurations géométriques \Rightarrow l'utilisation de constellations en configurations standards facilite le subitizing).²
- *Dénombrement* : utilise une suite de mots mis en correspondance terme à terme avec les objets de la collection : le dernier mot énoncé caractérise la quantité.

² Selon une expérience de Mme Descoedres en 1923 : on présente trois objets à des enfants de quatre ans et on leur demande combien il y en a : 52 % de réussite en comptant avec l'index, 74 % savent montrer trois doigts. La perception globale précède le comptage. De même certains enfants n'utilisent pas leurs doigts pour compter mais seulement pour montrer le résultat.

- Procédures qui relèvent du *comptage* :
 - ▷ recomptage : on compte à partir de 1, même si on a déjà connaissance de la quantité d'une sous-collection,
 - ▷ surcomptage , on compte à partir d'un nombre caractérisant une quantité (d'une sous-collection) déjà connu,
 - ▷ décomptage : compter "à reculons".
 - ▷ double comptage : faire avancer deux suites numériques décalées en même temps (ex déplacement du jeu de l'oie).
- Procédures relevant du *calcul* :
 - ▷ résultats mémorisés,
 - ▷ connaissances sur les nombres (décompositions).

3.5 Quelques variables didactiques

- Les collections : proximité et taille,
- Les objets des collections mobilité, disposition, dimensions absolues et relatives (tailles compatibles ou non)
- Les nombres mis en jeu : il existe différents domaines numériques
 - ▷ domaine des nombres visualisables (reconnaissance rapide ou globale, subitizing)
 - ▷ domaine des nombres familiers (maîtrise rapide de la comptine, comptage un à un efficace, usage social fréquent),
 - ▷ domaine des nombres fréquentés (nombres du calendrier , nombres présents mais peu fréquentés par les enfants),
 - ▷ domaine des "grands nombres" (rôle mythique pour l'enfant, nécessité d'activités de numération, d'algorithmes de calcul)

3.6 des outils pour aider l'apprentissage

- La file numérique (peut aller jusqu'à 10, ou jusqu'à 31 à cause du calendrier). On peut l'utiliser pour compter des collections mais aussi pour développer l'aspect ordinal. Une file peut être assortie d'un curseur.
- Le dictionnaire de nombres de 1 à 10 (Brissiaud) : file numérique perfectionnée, en plus du nombre écrit en chiffres, il y a la traduction en doigts, en dés, et un exemple de collection.
- Jeux sur la comptine numérique (à l'envers, de deux en deux, avec des blancs...)
- Les comptines
- Les livres à compter, écrits en commun (avec éventuellement une histoire..)
- Des jeux de cour (les poissons, variantes du facteur..)
- Le jeu de l'oie, les petits chevaux.
- Les dominos de Mme Herbinière Lebert.
- Les réglettes Cuisenaire.
- Le calendrier.
- Les boîtes Picbille