NOMBRES NATURELS et NUMERATION

A quoi servent les nombres ?

Les nombres servent à compter, classer, ordonner, trier, anticiper, évaluer, faire une approximation, calculer...

Vocabulaire et définitions :

- **Compter** : réciter la liste des nombres (**comptine numérique**).
- **Dénombrer** : associer un nombre entier à une quantité **discrète**[1]. Un ensemble est **dénombrable** si on peut le numéroter : 1, 2, 3...
  Ex. les crayons d'une trousse, les voitures immatriculées en France en juillet 1998, mais aussi les cailloux de plus de 100g sur terre, les entiers naturels. (il n'est pas nécessaire que l'ensemble soit fini)
- **Classer** : regrouper des éléments qui ont un point commun déterminé. Il n'y a pas, a priori, de hiérarchie entre les classes.
  Ex. "classer les crayons par couleurs"
- **Trier** : classer en deux classes, donc suivant un critère discriminant réalisant une partition de l'ensemble entre les éléments qui ont ce critère et ceux qui ne l'ont pas.
  Ex. "mets de côté tout ce qui, dans la trousse, permet d'écrire en rouge "
- **Mesurer** : déterminer combien d'unités contient une quantité. On ne peut mesurer qu'après avoir précisé une unité de mesure.
- **Ordonner** : ranger hiérarchiquement, suivant un critère annoncé.
  Ex. "du plus grand au plus petit"
- **Évaluer :** donner une approximation, c'est à dire une valeur approchée, souvent un nombre entier d'une unité choisie en fonction de la situation. *Ex. "On y mange pour 50 F, un euro c'est environ 6 F.."*
- **Calculer** : effectuer une opération.

Le nombre a ainsi trois grandes fonctions :

- **Cardinale** : mémoire d'une quantité
- **Ordinale** : mémoire d'un rang
- **Opératoire** : anticipation d'un résultat.

Aspects théoriques

Les nombres permettent de désigner des quantités.

Cependant, il n'est pas nécessaire de connaître les nombres pour percevoir les quantités, leurs variations ou leurs invariants, les comparer... notion de correspondance terme à terme, collections équipotentes.

[1] Discrète $\neq$ continu. Un ensemble est continu, si entre deux éléments, il y a une infinité d'éléments.

Comment garder la trace d'une information quantitative ?

Construire une collection intermédiaire équipotente[2] à la précédente, par correspondance terme à terme.[3]

Utiliser comme collection intermédiaire un ensemble de signes ou de mots différents, organisé en une suite stable et conventionnelle donc on "compte" ou "dénombre" la collection.[4]

Cinq principes sont nécessaires à la bonne utilisation d'une suite de signes :

- *principe d'adéquation unique :* chaque mot énoncé doit être mis en correspondance terme à terme avec un et un seul élément de la collection que l'on cherche à dénombrer
- *principe d'ordre stable* : les mots utilisés doivent être énoncés dans un ordre strict conventionnel.
- *principe cardinal* : le dernier mot de la suite suffit à garder la trace de la quantité
- *principe d'abstraction* : on peut compter n'importe quelle collection d'objets (objets disparates)
- *principe de non-pertinence de l'ordre* : il est possible de compter les objets dans n'importe quel ordre, le résultat reste inchangé.

Du fini à l'infini : les numérations

Il s'agit de construire des signes composés à partir d'un répertoire limité des signes de base.

Numération de type additif . Exemples : la numération romaine et la numération égyptienne. Elles comportent peu de signes ; les règles de construction des autres nombres se réduisent à de simples additions de signes juxtaposés, avec des principes d'échanges (V et V donnent X, etc)[5]
DCCCCLXXXXVII = 500+100+100+100+100+50+10+10+10+10+5+1+1 = 997.

Numération de position exemples le système babylonien et notre système décimal.

---

[2]Équipotente = de même cardinal = de même nombre d'éléments

[3]Les soldats grecs qui partaient au combat posaient un caillou à l'entrée de leur campement. Ils réalisaient ainsi une collection équipotente à l'armée. Chaque caillou correspondait à un soldat : correspondance terme à terme. Au retour de la bataille chaque soldat ramassait un caillou. Le tas de cailloux restant permettait de quantifier les pertes.

[4]Les Babyloniens utilisaient des petits cailloux enfermés dans une poche d'argile : si lors d'une transaction 20 tonneaux d'huile avaient été vendus, 20 cailloux étaient placés dans la poche d'argile. Au moment de payer la dette, on cassait la poche d'argile et on comptait les cailloux. Afin, sans doute, de s'y retrouver dans leurs poteries, ils prirent le pli de marquer sur l'argile encore frais la quantité de cailloux à l'intérieur. Enfin, ils comprirent qu'ils pouvaient s'affranchir des cailloux et que la trace écrite suffisait : la numération était née. . .

[5]Une multiplication romaine : 3 fois 17 = 17+17+17 = XVII+XVII+XVII = XXXVVVIIIIII, on transforme les paquets de 5 I en un V : XXXVVVVI, puis les paquets de 2 V en X : XXXXXI, enfin 5X c'est L, donc LI=51.

Une numération de position repose sur trois principes :

- la valeur d'un signe dépend de sa position dans l'écriture du nombre
- cette valeur représente un groupement d'unités inférieures qui sont échangées contre un élément de l'unité immédiatement supérieure,
- le groupement est régulier (un groupement contient toujours le même nombre d'éléments pour être échangé contre l'unité immédiatement supérieure ; la valeur de cet échange s'appelle la base),

Pour être tout à fait efficace, deux principes supplémentaires sont nécessaires :
- existence d'un nombre de signes différents égal à la base,
- un des signes doit marquer l'absence de groupement d'une unité : le zéro.

Cas particulier

Numération décimale écrite
En base 10, 725 "vaut" $7 \times 100 + 2 \times 10 + 5$
Dans une base b, les groupements successifs se font par b éléments ; le nombre qui s'écrit : $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ est égal à $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$.
donc, en base 8, le nombre qui s'écrit 725 "vaut" $7 \times 64 + 2 \times 8 + 5 = 469$ en base 10.
notation
Afin de ne pas s'y perdre on note : 725 pour le nombre en base dix, $\overline{725}_{huit}$ ou $\overline{725}^{huit}$ quand il est en base huit.
Remarques
$\overline{725}_{sept}$ n'existe pas. En base sept, on n'utilise que les chiffres de 0 à 6.

Au delà de la base dix, on doit inventer de nouveaux chiffres, on utilise les lettres A pour dix, N pour onze, etc. Ainsi, $\overline{BAC}_{quinze}$ représente $11.15^2 + 10.15 + 12 = 2637$.

Numération orale :
Tous les nombres inférieurs à dix, ainsi que certaines puissances de dix ont un nom indépendant des autres[6]. Le nom des autres est composé à partir des précédents selon un principe additif ou multiplicatif. La langue a évolué faisant apparaître d'autres choix, et certaines anomalies.

[6] Au XVIII^{eme} siècle on trouve parfois « duante » pour désigner 20, ainsi que « dix-deux » pour 12. (C'est du moins ce que suggère Condorcet aux débuts de la Révolution). L'utilisation populaire de la base vingt (un franc c'est vingt sous) et de la base douze (une douzaine d'œufs) a résisté au « tout décimal ». Les Belges emploient septante et nonante, les Suisses y rajoutent octante. Ces irrégularités compliquent l'apprentissage.