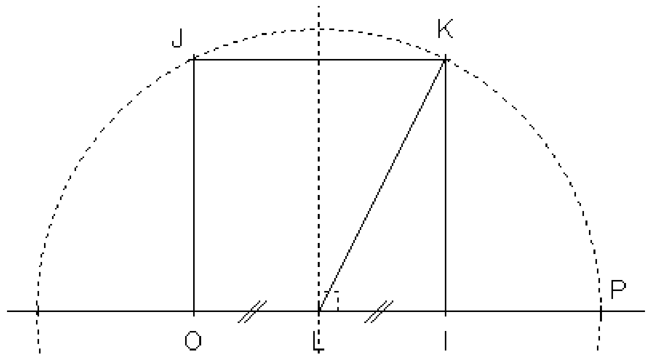
Décimaux - Rationnels

Exercice 1

	$3,5$	-7	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{230}{5}$	$\frac{22}{7}$	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{100}$
Entiers naturels									★
Entiers relatifs		★			★				★
Décimaux	★	★		★	★				★
Rationnels	★	★	★	★	★	★			★
Réels	★	★	★	★	★	★	★	★	★

Exercice 2

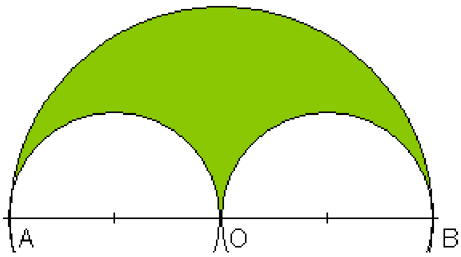


1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle LIK. On obtient : $\text{LK}^2 = \text{LI}^2 + \text{IK}^2$. Dans le repère (O ;I), on a OI=1, donc LI= $\frac{1}{2}$ et IK=1.
   D'où $\text{LK}^2 = \frac{5}{4}$, donc LK= $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
   L'abscisse de P, dans le repère (O ;I) est le nombre OP. Or OP=OL+LP=OL+LK.
   Donc OP= $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. $\phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   Donc $\phi^2 - \phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
   ϕ est bien solution de l'équation $x^2 - x = 1$.
   On divise cette relation par ϕ et on obtient $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$, donc $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.
3. $2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361$, donc $3,2360 < 1+\sqrt{5} < 3,2361$ donc $1,6180 < \phi < 1,61805 < 1,6181$.

Exercice 3

1. On considère le nombre $x = 0,\overline{54}$
   (a) $100x = 54,\overline{54} = 54 + 0,\overline{54} = 54 + x$.
   (b) $100x = 54 + x$, donc $99x = 54$, d'où $x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$.
2. $x = 0,9999\ldots$, on a donc $10x = 9,999\ldots$, donc $9x = 9$ et $x = 1$.
3.
   - $x = 19,\overline{78}$, $100x = 1978,\overline{78} = 1959 + x$, donc $99x = 1959$ et $x = \frac{1959}{99} = \frac{653}{33}$
   - $x = 142,\overline{6472}$, donc $10000x = 1426472,\overline{6472} = 1426330 + x$, donc $9999x = 1426330$ et $x = \frac{1426330}{9999}$.
   - $x = 123,345\overline{678}$, donc $10000x = 12334456,785\overline{678} = 12334333,44 + x$.
     D'où $9999x = 12334333,44$, donc $x = \frac{1233433344}{999900} = \frac{9344192}{7575}$

Exercice 4



L'aire du grand demi disque mesure $\dfrac{\pi \times (\dfrac{AB}{2})^2}{2} = \pi \dfrac{AB^2}{8}$.

L'aire des demi-disques de diamètres OA et OB est l'aire d'un disque complet de rayon $\dfrac{AB}{4}$, donc $\pi \times \dfrac{AB^2}{16}$.

Donc l'aire colorée mesure $\pi \dfrac{AB^2}{8} - \pi \times \dfrac{AB^2}{16} = \pi \times \dfrac{AB^2}{16}$

AB vaut 4 cm à 1 mm près, avec de plus 3,14<π<3,15.

Donc l'aire mesure entre $3,14 \times \dfrac{3,9^2}{16}$ et $3,15 \times \dfrac{4,1^2}{16}$, donc entre 2,98 cm^2 et 3,31 cm^2.

Exercice 5

Résoudre dans l'ensemble des nombres décimaux, puis dans celui des rationnels, les équations suivantes :

équation	solution rationnelle	solution décimale
$3x + 4 = x - 5$	$\frac{-9}{2}$	$\frac{-9}{2} = -4,5$
$9y - 2 = 3(y - 1)$	$\frac{-1}{6}$	pas de solution
$6z - 1 = 3(z - 4) + \pi$	pas de solution car $\frac{-11+\pi}{3}$ n'est pas rationnel	pas de solution
$(3x + 2)(2 - 5x)(11x + 4) = 0$	$\frac{-2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{-4}{11}$	$\frac{2}{5} = 0,4$

Exercice 6

L'aire non grisée mesure $2 \times 1,5 + 1 + 1 = 5$ carreaux.

L'aire grisée représente donc les $\dfrac{3}{8}$ du carré.

Exercice 7

Le nombre $10,123456789123456789123456789\ldots$ est rationnel car son développement décimal est périodique.

Il n'est pas décimal car la suite des décimales est infinie et la période n'est pas uniquement constituée de 9.

Le nombre $2,110100100010000\ldots$ ne présente aucune périodicité, il n'est donc pas rationnel, ni a fortiori décimal.

Exercice 8

$B = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{2}{1}) = \dfrac{3}{2}$

$C = \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{\dfrac{3}{2}}) = \dfrac{17}{12}$

$D = \dfrac{1}{2}(\dfrac{17}{12} + \dfrac{2}{\dfrac{17}{12}}) = \dfrac{577}{408}$

$B^2 \approx 2,25$, $C^2 \approx 2,007$, $D^2 \approx 2,000006$

Comme les carrés des termes de la suite semblent se rapprocher de 2, on peut supposer que la suite de rationnels se rapproche de $\sqrt{2}$.

Exercice 9

1. $A = \dfrac{29}{55}$ est irréductible et son dénominateur ne se décompose pas sous la forme $2^a \times 5^b$, donc A n'est pas décimal.
   $B = \dfrac{39}{75} = \dfrac{13}{25} = \dfrac{52}{100}$, donc B est décimal.
   $A - B = \dfrac{29}{55} - \dfrac{13}{25} = \dfrac{2}{275}$ donc $A > B$.
   (ou : $A = 0,52727\ldots$ et $B = 0,52$)
2. Un nombre décimal strictement compris entre A et B : 0,527.
3. Un nombre rationnel non décimal strictement compris entre A et B : $B + \dfrac{1}{275}$, ou $0,5222\ldots$.
4. Un nombre irrationnel strictement compris entre A et B : $B + \dfrac{\pi}{1000}$.

Exercice 10

$(\sqrt{3} + \dfrac{6}{\sqrt{3}})^2 = 3 + \dfrac{36}{3} + 2\sqrt{3}\dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2 + 12 + 12 = 27.$
Ce nombre est donc entier, décimal, rationnel et réel.

Exercice 11

1. $\dfrac{p+8}{p} = 1 + \dfrac{p}{8}$. Ce nombre est donc entier si p est un multiple de 8.
2. $\dfrac{p+7}{p-1} = \dfrac{p-1+8}{p-1} = 1 + \dfrac{8}{p-1}$. Ce nombre est entier si $p-1$ divise 8, donc si p prend l'une des valeurs : 2, 3, 5, 9.
3. $\dfrac{2p+6}{p-1} = \dfrac{2p-2+8}{p-1} = \dfrac{2p-2}{p-1} + \dfrac{8}{p-1} = 2 + \dfrac{8}{p-1}$. Comme précédemment, ce nombre est entier si $p-1$ divise 8, donc si p prend l'une des valeurs : 2, 3, 5, 9.

Exercice 12

1. Parmi les carrés et les triangles équilatéraux, on veut trouver ceux qui ont le même périmètre. On appellera couple un triangle et un carré de même périmètre.
   (a) Trouver deux couples en choisissant pour longueur des côtés des nombres entiers : (4 ; 3) et (8 ; 6)
   (b) Trouver deux couples en choisissant pour longueur des côtés des nombres décimaux non entiers : (0,4 ; 0,3) et (0,04 ; 0,03)
   (c) Trouver deux couples en choisissant pour longueur des côtés des nombres rationnels non entiers : $(\dfrac{4}{7} ; \dfrac{3}{7})$ et $(\dfrac{4}{11} ; \dfrac{3}{11})$

(d) Trouver deux couples en choisissant pour longueur des côtés des nombres n'appartenant pas aux types précédents : $(4\pi ; 3\pi)$ et $(4\sqrt{3} ; 3\sqrt{3})$

2. $4a = 3b$
3. Le périmètre est donc un multiple de 4 et de 3, donc de leur PPCM, à savoir 12. Il suffit donc de prendre les multiples de 12 : 24, 36, 48, … et de les diviser par 3 et par 4 pour trouver des valeurs possibles pour b et a.
4. $4a = 3b$ donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4}$.
   Pour obtenir des couples avec a et b décimaux non entiers il suffit de prendre un décimal quelconque pour b et d'en prendre les trois quarts pour obtenir un autre décimal a.
5. $a = \dfrac{1}{p}$ et $b = \dfrac{1}{p'}$, et $4a = 3b$ donc $\dfrac{4}{p} = \dfrac{3}{p'}$ donc $4p' = 3p$. Les couples (p, p') suivants conviennent : (4,3) (8,6) (12,9) (16, 12) (20,15).

Exercice 13

Ecrire un entier à la place du pour que l'écriture fractionnaire $\frac{\#}{85}$ désigne...

1. un entier naturel : il suffit de prendre un multiple de 85, par exemple 85, ou 170 ou 0.
2. un décimal non entier : 85=17 $\times$ 5, il faut donc "simplifier le 17". Tout multiple de 17, non multiple de 85, convient, par exemple 34. En effet $\frac{34}{85} = 0,4$
3. un rationnel non décimal : il faut éviter de simplifier le 17. Donc tout nombre non multiple de 17 convient.

Mêmes questions avec l'écriture $\frac{85}{\#}$

1. un entier naturel : il suffit de prendre un diviseur de 85, donc 85, ou 17 ou 5 ou 1.
2. un décimal non entier : tout nombre de la forme $2^a \times 5^b$ convient sous réserve qu'il soit différent de 5 (car alors on aurait un entier). On peut prendre par exemple 8, ou 10 ou 125 ...
3. un rationnel non décimal : il suffit de prendre un nombre dont la décomposition n'est pas du type $2^a \times 5^b$.

Exercice 14

3,8276 $<$ 3,8ab4 $<$ 3,834 .
Les couples qui conviennent sont : (2,8), (2,9), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3).