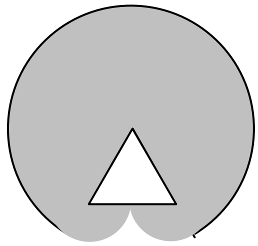
CORRECTION DES EXERCICES SUR LA MESURE

Exercice 1



Le périmètre du territoire du chien se calcule comme la somme des longueurs de trois arcs de cercle et du périmètre du triangle : deux tiers d'un cercle de rayon 9m, deux fois un tiers d'un cercle de rayon 3m et trois fois 6m.

La longueur cherchée est donc :

$\frac{5}{6}\times\pi\times 18 + 2\times\frac{1}{3}\pi\times 6 + 18 = 19\pi + 18 \approx 77{,}7$ m.

Exercice 2

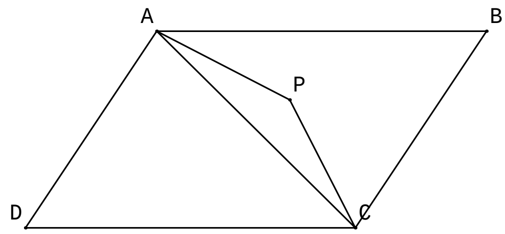
Appelons a l'aire d'un quart de disque de rayon 5 cm et b l'aire d'un quart de disque de rayon $5\sqrt{2}-5$.

L'aire hachurée vaut alors :

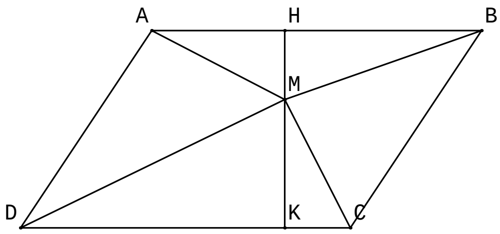
$\frac{3}{4}\times 10^2 - 3a + b = 75 - 3\pi\times\frac{25}{4} + \pi\times\frac{(5\sqrt{2}-5)^2}{4} = 75 - \frac{25\pi\sqrt{2}}{2}$

Soit environ 19,46 cm².

Exercice 3



1) Si P est sur la diagonale [AC] les deux aires sont égales car les surfaces PADC et PABC sont deux triangles identiques. Si P n'est pas sur cette diagonale les deux surfaces ont une aire différente : la différence est l'aire du triangle PAC, cette aire n'est pas nulle car la distance de P à [AC] est non nulle.



2) Soient H et K les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (CD). L'aire de la partie P_1 est alors : $\frac{AB\times MH}{2} + \frac{CD\times KM}{2}$. Comme ABCD est un parallélogramme, on a $AB = CD$. Donc l'aire de P_1 vaut : $\frac{AB\times(MH+KM)}{2}$. Mais $MH+KM = HK$. Donc l'aire de P_1 vaut : $\frac{AB\times HK}{2}$, c'est à dire la moitié de l'aire du parallélogramme. Ceci est vrai quelle que soit la position du point M. Donc P_1 et P_2 ont toujours la même aire.

Exercice 4

1) Si la longueur d'un côté est 2 cm, la longueur de l'autre dimension est $\frac{(p-4)}{2}$. L'aire du rectangle est donc $\frac{(p-4)}{2}\times 2 = p-4$.

2) Le carré a pour côté $\frac{p}{4}$ donc pour aire $\frac{p^2}{16}$.

3) Le rayon du cercle est r tel que $2\pi r = p$, donc $r = \frac{p}{2\pi}$ et l'aire mesure $\pi(\frac{p}{2\pi})^2$, c'est à dire $\frac{p^2}{4\pi}$.

4) $\pi < 4$, donc $\frac{p^2}{4\pi} > \frac{p^2}{16}$. L'aire est plus grande pour le disque que pour le carré. Montrons que l'aire est plus petite pour le rectangle que pour le carré : $\frac{p^2}{16} - (p-4) = \frac{p^2-16p+64}{16} = \frac{(p-4)^2}{16} = (\frac{p-4}{4})^2$. Cette quantité est donc positive ou nulle.

Exercice 5

La longueur x satisfait à l'équation : $(210{,}6+x)(112-4) = 210{,}6\times112$.
Donc : $108x = 842{,}4$, d'où $x = 7{,}80$ m.
Le périmètre était initialement de $(112+210{,}6)\times2 = 645{,}20$ m.
Il est maintenant de $(108+218{,}4)\times2 = 652{,}80$ m. Il faut rajouter du grillage.

Exercice 6

1) Volume du cône : $\frac{(\pi\times8^2)\times25}{3} = \frac{1600\pi}{3} \approx 1675{,}5$ cm^3. La capacité est donc de 1,6755 l.
2) D'après le théorème de Thalès appliqué aux droites parallèles (CD) et (AB) et aux droites sécantes (SA) et (SB), on a : $\frac{CD}{AB} = \frac{SC}{SA}$.

   Donc $CD = \frac{SC\times AB}{SA}$ $CD = \frac{5\times8}{25} = 1{,}6$ cm.

3) Le volume du petit cône est (comme question 1) : $\frac{\pi\times1{,}6^2\times5}{3} \approx 13{,}4$ cm^3. Le tronc de cône a un volume d'environ $1675{,}5-13{,}4 = 1662{,}1$ cm^3. La hauteur est égale à 80% de la hauteur initiale et le volume à 99,2% du volume initial. Le volume n'est donc pas proportionnel à la hauteur.[1]

Exercice 7

La mesure de l'arête de la boîte sera maximale pour le PGCD des trois dimensions, c'est à dire pour 15 cm.
Il y aura alors $\frac{150}{15}\times\frac{165}{15}\times\frac{105}{15} = 10\times11\times7 = 770$ boîtes dans la caisse.

[1] On notera toutefois que la question est mal posée : deux nombres sont toujours proportionnels. Il faut sans doute sous-entendre que la hauteur du tronc de cône est susceptible de varier et que l'on veut savoir si les variations du volume sont proportionnelles aux variations de cette hauteur.