LA MESURE

Un peu d'histoire

« *Ce qu'on reprochait à la multiplicité des patois, on le reprocha aussi à la diversité des poids et mesures: le bois à brûler se vendait à la corde ; le charbon de bois à la banne ; le charbon de terre à la bacherelle, l'ocre au tonneau et le bois de charpente à la marque ou à la solive. On vendait les fruits à cidre à la poinçonnée ; le sel au muid, au sétier, à la mine, au minot, au boisseau et à la mesurette ; la chaux se vendait au poinçon, et le minerai à la razière. On achetait l'avoine au picotin et le plâtre au sac ; on se procurait le vin à la pinte, à la chopine, à la camuse, à la roquille, au petit pot, et à la demoiselle. On vendait l'eau-de-vie à la potée ; le blé au muid et à l'écuellée. L'étoffe, les tapis et la tapisserie s'achetaient à l'aune carrée; le bois et les prés se comptaient en perches carrées, la vigne en daurées. L'arpent valait douze hommées et l'hommée exprimait le travail d'un homme en un jour; ainsi en allait-il de l'oeuvrée. Les apothicaires pesaient en livres, en onces, en drachmes et en scrupules; la livre valait douze onces, l'once huit drachmes, la drachme, trois scrupules et le scrupule vingt grains.*

Les longueurs étaient mesurées en toise et en pied du Pérou, lequel équivalait à un pouce, une logne et huit points du pied du Roi, pied du roi qui se trouvait être celui du roi Philictère, celui de Macédoine et celui de Pologne; celui aussi des villes de Padoue, de Pesaro et d'Urbino. C'était à fort peu près l'ancien pied de Franche-Comté, du Maine et du Perche, et le pied de Bordeaux pour l'arpentage. Quatre de ces pieds approchaient l'aune de Laval. Cinq d'entre eux faisaient l'hexapode des Romains qui était la canne de Toulouse et la verge de Norai. C'était aussi celle de Raucourt et également la corde de Marchenoir en Dunois. A Marseille, la canne pour les draps était plus longue que celle pour la soie d'environ un quatorzième. Quelle confusion ! 7 à 800 noms.

« Deux poids et deux mesures! », c'était le symbole même de l'inégalité. Répondant aux voeux exprimés dans les cahiers de doléances de 1789, mais également à ceux des états généraux de 1576, demandant que « par toute la France, il n'y ait qu'une aune, qu'un pied, qu'un poids et qu'une mesure », la Révolution décida de tout uniformiser. Elle instaura un système de mesure unique et uniforme, assurant la facilité dans les échanges, et l'intégrité dans les opérations de commerce. »

Denis Guedj La Méridienne

La volonté d'adoption d'un système unifié d'unités date de la Révolution. Jusque là les mesures étaient fondées soit sur des principes anthropométriques (la coudée, le pied, le pouce…) soit sur des contenants (la pinte, le gallon, le boisseau…). Les mesures n'étaient pas unifiées, ce qui entraînait de nombreux abus. (quantités, cadastre…)
La Révolution veut réduire ces abus, unifier symboliquement le pays, simplifier les choses au niveau des impôts, supprimer les barrières douanières internes, faciliter le commerce intérieur.
En 1789, on fixe le mètre (40 000 000 m autour de la Terre) et le gramme (1000 g d'eau distillée occupent un décimètre cube). On se lance dans la mesure du méridien terrestre. Mais le peuple résiste..
Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle voit aussi le développement des statistiques, qui demandent des unités communes pour les données.

Talleyrand demande à l'Angleterre d'adopter le même système afin de dynamiser les échanges commerciaux. L'Angleterre refuse. A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, toute l'Europe l'a officiellement adopté, à part l'Angleterre et la Russie.
En 1812, sous l'Empire, un décret autorise la coexistence du nouveau et des anciens systèmes de mesure.
En 1840, le nouveau système devient obligatoire. Mais il faudra attendre l'École obligatoire pour qu'il s'impose.

Le mesurage

définitions

On appelle grandeur une quantité que l'on peut mesurer. Une grandeur est susceptible de variation.

> On appelle grandeur tout caractère d'un objet, susceptible de variations chez cet objet, ou d'un objet à un autre. On qualifie de « grandeurs mesurables » celles pour lesquelles on pourra définir :
> 1) une relation d'équivalence (comme « ...aussi long que… » pour les longueurs) ;
> 2) une relation d'ordre (comme « ..plus long que… » pour les longueurs) ;
> 3) une opération interne (sommation) ;
> 4) une opération externe (multiplication par un nombre : on peut parler d'une tige « 2 fois plus longue qu'une autre »).
> Ainsi des grandeurs comme les longueurs, les masses, les aires et les volumes sont des grandeurs mesurables, alors que la couleur ne l'est pas. Les relations et opérations sur les grandeurs doivent faire l'objet d'une définition pour chaque grandeur considérée.
> (APMEP 1982).

Pour mesurer une grandeur a, il faut choisir une unité u et déterminer le réel x tel que $a=x\times$u.
x est la mesure de a relativement à l'unité u. On note $a = x$ u.

remarques :

- la même grandeur a différente mesures selon l'unité choisie :
  0°C=373°K, 1 km²=10000 a…
- la mesure d'une grandeur relativement à une unité est un nombre. On peut calculer en utilisant ce nombre, mais le résultats des opérations effectuées n'est pas forcément une mesure d'une grandeur de même nature, ni même d'une grandeur tout court .
  La moyenne de deux températures est une température, le produit de deux températures n'est rien.

propriétés

- Si a et b sont deux objets disjoints : mes(a $\cup$ b)=mes(a)+mes(b).
- Si x = mes $_{\text{u}}(a)$ et y = mes $_{\text{v}}(a)$, alors xu = yv (règle de conversion)
- Sauf exception (la température), une mesure est un nombre positif.

Catalogue

Les préfixes :
téra, giga, kilo, hecto, déca, déci, centi, milli, micro, nano, pico, fento

objet	grandeur mesurable	unités courantes
segment	longueur	m, (cm, km, mm,..), micron $\mu=10^{-6}$m angström : 10^{-10}m mille marin pouce…

		Le mètre a été la 40000ème partie du méridien terrestre, puis la longueur du mètre étalon, puis la trajectoire de la lumière en 1/294792452 s.[1]
surface	aire, périmètre	m^2… are, hectare
solide	volume, capacité aire masse	m^3,… stère, litre… g,..t, q
temps	durée	s, min, h, j .. (base 60, base 24..)
angle	mesure de l'angle	°, rad, gr

Formulaires

les surfaces

surface	périmètre	aire
carré	4a	a^2
rectangle	2(L+l)	$L\times l$
parallélogramme	2(L+l)	$L\times h$
losange	4a	$d\times D$
triangle	a+b+c	$\frac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2}$
triangle rectangle		$a\times b$
trapèze	somme des côtés	$\frac{(B+b)\times h}{2}$
disque	$2\pi r = \pi D$	πr^2
secteur circulaire		$\frac{\pi r^2\alpha°}{360}$
secteur angulaire		$\pi(R^2-r^2)$

justifications pour le trapèze et le parallélogramme.

volumes

solide	aire	volume
cube	$6a^2$	a^3
parallélépipède rectangle	2(ab+ac+bc)	abc
prisme droit ou cylindre		aire(base)×h
pyramide ou cône		$\frac{\text{aire(base)}\times h}{3}$

[1] Le pouce (inch noté « ” ») vaut 2,54 cm ; c’est sensiblement la largeur du pouce d’un homme adulte, ce qui le rend très pratique pour des mesures demandant peu de précision. Le pouce est partagé en douze lignes et la ligne en six points.
Le pied (foot) vaut 12 pouces soit 30,48 cm et le yard vaut 3 pieds (91,44 cm).
Ainsi, pour une longueur dont nous dirions qu’elle mesure 914 cm, un américain trouverait comme mesure un des nombres 10, 30 ou 360 selon qu’il utiliserait le yard, le pied ou le pouce.

sphère	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Activité : grandeurs commensurables

Une activité en classe

On distribue aux élèves des petits carrés (tous identiques, un par élève) d'environ 3 cm de côté ainsi qu'une feuille sur laquelle est tracé un segment d'environ 14 cm de long. Les élèves doivent rédiger un message permettant de tracer un segment de même longueur. Les seuls outils autorisés sont la règle non graduée et le petit carré.

Cette activité permet, normalement, de voir apparaître diverses procédures (Soit u l'unité et L la longueur du segment. On a $L = n\times u+r$)

- Si r est négligeable devant u, il est négligé ! (idem si r est très proche de u : on arrondit au dessus). Sinon on cherche à l'évaluer.
- Utilisation de la moitié de u, de la moitié de la moitié… obtenus par pliage. On peut ainsi plier jusque 3 voire 4 fois, donc atteindre une précision du seizième d'unité. On plie jusqu'à tomber sur un résidu négligeable, ce qui sera forcément le cas après quatre pliages : environ 2 mm.
- Report de r dans u : si r rentre trois fois dans u, on l'indique. Cette procédure n'a lieu que si le report est quasiment exact. Elle est peu opérationnelle pour le récepteur du message qui devra passer par une procédure tâtonnée.
- Utilisation d'unité auxiliaire (la diagonale) ?

Les messages sont de trois catégories :

- Message entièrement en français, décrivant la suite des actions : « tu places trois fois, tu plies,… »
- Message donnant la mesure en français : « c'est trois fois l'unité et une moitié. »
- Message incluant un codage chiffré : « $u + \frac{1}{2}u$. »

Dans une deuxième phase, on demande aux élèves de reprendre l'activité en donnant un message le plus court possible. Cela conduit à une extension des messages du troisième type.
Les élèves utilisent donc de plus en plus d'écritures fractionnaires. Certains élèves trouvent des écritures telles que $\frac{1}{32}$ par extension de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, bien que le pliage ne soit pas réalisable.

Aspects didactiques

les instructions officielles

Au cycle 1 : on aborde le mesurage à travers des activités de classement, de rangement d'objets et des activités de repérage dans le temps. Utilisation d'une unité (bout de bois..) pour comparer des longueurs.

Au cycle 2 : maîtrise du calendrier et de la montre à aiguilles, mesure de longueur à l'aide d'une règle graduée, connaissance des unités de longueur, et de masse.

Au cycle 3 : mesure d'aires et de volumes, de capacités.

- construction du concept d'aire à l'aide de découpages, de puzzle (tangram)
- classement de surfaces par ordre d'aires
- distinction aire-périmètre-forme-étendue d'une surface
- mesure à l'aide d'unités

- calculs de conversions
- utilisation des formules
- construction d'une figure d'aire quadruple..
- estimation d'une aire

Longueurs et périmètres

compétences requises	**difficultés, erreurs**
comparer les longueurs d'objets ▪ par superposition ▪ à l'aide d'un objet intermédiaire ▪ à l'aide de transformations licites (report de longueurs sur une droite) ▪ à l'aide d'une unité de grandeur	problèmes de développement psychologique : "élèves non conservants"[2] difficultés de manipulation
mesurer avec un double décimètre	manipulation : positionnement du zéro lecture des millimètres
calculer un périmètre à l'aide des mesurer données ou d'un quadrillage	pour l'élève un périmètre se calcule, il ne se mesure pas l'élève ajoute toutes les distances de la figure (le périmètre est une notion additive) comptage de trop de carreaux si c'est un quadrillage ajout de périmètres de figures composantes confusion avec notions liées à l'aire
estimer la longueur d'un objet	manque de repères, d'ordres de grandeurs notamment pour les grands nombres
convertir différentes unités	erreurs de calcul sur les puissances de dix
résoudre des problèmes faisant intervenir le périmètre	confusion aire-périmètre calculs

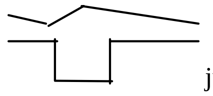
variables didactiques :

- nature des objets (physiques ou dessinés, rectilignes ou courbes)
- taille des objets, espace géométrique mobilisé
- matériel à disposition, quadrillage
- présence de dimensions inutiles, de segments inutiles
- présence d'un formulaire

aires

compétences requises	**difficultés et erreurs**
comparer des aires ▪ par superposition ▪ par découpage et recollement ▪ avec une unité de mesure	▪ problème de "conservation" ▪ théorème en acte : confusion avec le périmètre, la forme, l'étendue ▪ difficulté à concevoir qu'on puisse calculer l'aire d'un triangle ou d'un disque à partir d'une unité carrée. ▪ théorème en acte : "si les figures ne sont pas superposables, elles n'ont pas la même

---

2  jusqu'à 7 ans les enfants peuvent penser que ces "segments" ont la même longueur.

	aire" ▪ difficultés de manipulation.
déterminer l'aire d'une figure à partir de ses dimensions : ▪ avec une formule ▪ par décomposition de la figure ▪ par soustraction	▪ erreur dans le choix de la formule ▪ faute de calcul ▪ difficulté d'analyse de la figure
exprimer l'aire d'une figure avec une unité	
convertir	erreur de conversion, "saut de deux"
estimer la mesure d'une surface	manque de repères
résoudre des problèmes	comme pour le périmètre.

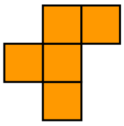
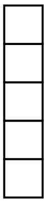
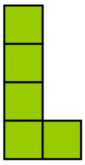
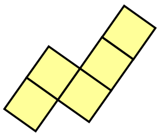
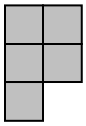
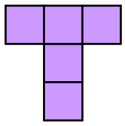
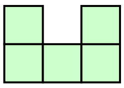
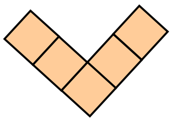
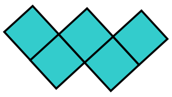
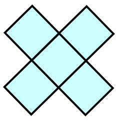
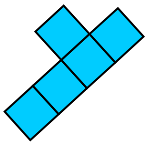
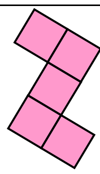
variables : comme pour le périmètre.

Quelques bases d'activités : puzzles et rep-figures

L'utilisation de puzzles permet de constater des variations géométriques à aire constante. Inversement la découverte de situations telles que le flocon de neige et autres fractals permet de constater que l'aire peut changer à périmètre constant.[3]

Un cas particulier intéressant : les pentominos

Activité : il s'agit de trouver toutes les formes que l'on peut réaliser avec 5 carrés identiques juxtaposés, joints par des arêtes. Les figures obtenues peuvent être retournées.
On obtient :

F	I	L	N	P	T
					
U	V	W	X	Y	Z
					

Caractérisation des différents pentominos

	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre de côtés	10	4	6	8	6	8	8	6	10	12	8	8
Périmètre	12	12	12	12	10	12	12	12	12	12	12	12
Nombre de positions	8	2	8	8	8	4	4	4	4	1	8	4
Nombres d'axes de sym.	0	2	0	0	0	1	1	1	1	4	0	0
Rotations	0	2	0	0	0	0	0	0	0	4	0	2
Maximum contre un côté	2	5	4	3	3	3	3	3	2	1	4	2

On peut poursuivre l'exploration avec les pièces formées de deux pentominos : périmètre minimal ?…

[3] Dans ce sens l'indépendance est plus facile à illustrer : il suffit de déformer un parallélogramme ou de considérer l'aire intérieure à la boucle constituée par une ficelle.

Les rep-figures

Les rep-figures sont celles qui sont pavables par des homothétiques. C'est le cas de tous les triangles, des carrés, mais aussi des sphinx et du trimino coudé.
Avec un certain nombre de triminos coudés, on encercle une zone. Quelle est l'aire maximale de cette zone ? l'aire minimale ? le périmètre maximal ? minimal ?