

GÉOMÉTRIE PLANE : GÉNÉRALITÉS

1 Un peu d'histoire

–3000 à –500	La géométrie est purement utilitaire (calculs d'aires, de distances, architecture..), on ne s'intéresse pas du tout à l'aspect démonstration.
5ème et 4ème siècles av. JC	Pythagore, Aristote : la géométrie fait partie de la philosophie, c'est une clé pour comprendre le monde. Apparition de la démonstration, élément du dialogue philosophique (ex. la maïeutique et Euclide rassemble les résultats connus dans ses éléments.
Xème siècle ap. JC	Trigonométrie (mathématiciens arabes)
XVIème siècle	Géométrie projective (Girard Desargues)
XVIIème siècle	Géométrie analytique (Descartes) : invention des coordonnées.
XVIIIème siècle	Géométrie descriptive (Monge)
XIXème siècle	Invention des géométries non euclidiennes (Lobachevski et Riemann)
XXème siècle	Une géométrie est un ensemble de transformation sur un ensemble d'objets avec un ensemble de règles.

2 Dictionnaire illustré de géométrie plane

2.1 Figure, définition, notation pour les termes :

2.1.1 Les angles

Angle	portion du plan délimité par deux demi-droites de même origine.
angle droit	angle dont les côtés sont perpendiculaires
angle aigu	angle plus petit qu'un angle droit.
angle obtus	angle plus grand qu'un angle droit
angle plat	angle double d'un angle droit
angle rentrant	angle plus grand qu'un angle plat
angle saillant	angle plus petit qu'un angle plat
angles complémentaires	angles dont la somme des mesures équivaut à celle d'un angle droit
angles supplémentaires	angles dont la somme des mesures équivaut à celle d'un angle plat

2.1.2 Le cercle

cercle	le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r de O.
disque	ensemble des points situés à l'intérieur d'un cercle
corde	segment dont les extrémités appartiennent au cercle
diamètre	corde passant par le centre
arc	portion de cercle délimité par deux points
tangente	droite ayant exactement un point de contact avec un cercle, en ce point la tangente est perpendiculaire au rayon
rayon	segment dont les extrémités sont le centre du cercle et un point du cercle

2.1.3 Les triangles

triangle	polygone de trois côtés
triangle acutangle	triangle dont tous les angles sont aigus
triangle équilatéral	triangle ayant ses trois côtés de même longueur
triangle isocèle	triangle ayant deux côtés de même longueur
triangle rectangle	triangle ayant un angle droit
triangle scalène	triangle n'étant ni rectangle ni isocèle
hypoténuse	le plus grand côté d'un triangle rectangle (les petits s'appellent des "cathètes")

2.1.4 Les polygones

polygone	ligne brisée fermée
polygone convexe	polygone tel que tout segment joignant des points intérieurs est intérieur au polygone
polygone concave	polygone non convexe
polygone croisé	polygone dont deux côtés sont sécants
polygone régulier	polygone dont tous les angles au sommet sont de même mesure et dont tous les côtés sont de même longueur
quadrilatère	polygone à quatre côtés
penta-, hexa-, hepta-, octo-, ennea-, deca-...gone	polygone à 5, 6, 7, 8, 9, 10 côtés.

3 Constructions usuelles

3.1 Triangle équilatéral

Pour tracer un triangle équilatéral ABC : tracer un segment $[AB]$, prendre au compas l'ouverture AB . Pointer successivement en A et en B , tracer deux arcs de cercle sécants en C . Tracer les segments $[AC]$ et $[BC]$.

3.2 Bissectrice

Soit $\widehat{xOy}$ un angle. Pointer le compas en O , tracer un arc de cercle coupant les deux côtés de l'angle en A et en B . Avec une ouverture quelconque pointer en A puis en B et tracer deux arcs de cercles sécants en un point C . La bissectrice est la demi-droite $[OC)$.

3.3 Médiatrice, milieu

Soit $[AB]$ un segment. Prendre une ouverture de compas supérieure à la moitié de AB , pointer successivement en A et en B et tracer deux grands arcs de cercles sécants en deux points C et D . (CD) est la médiatrice de $[AB]$. L'intersection de $[AB]$ et de (CD) est donc le milieu de $[AB]$.

3.4 Angle de 60° , 30° ...

Pour tracer un angle de 60° , tracer un triangle équilatéral. Pour tracer un angle de 30° , tracer un angle de 60° puis sa bissectrice ...

3.5 Perpendiculaire, hauteur

Pour tracer la perpendiculaire à une droite D passant par un point A , pointer le compas en A , prendre une ouverture assez grande pour tracer un arc coupant D en deux points B et C , puis tracer la bissectrice de $[BC]$.

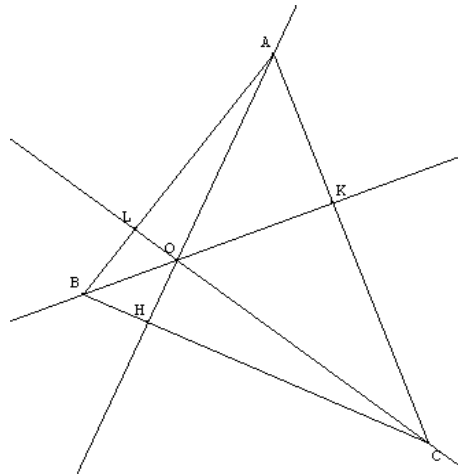
3.6 Parallèle

Pour tracer la parallèle à une droite D passant par un point A , tracer la perpendiculaire, puis la perpendiculaire à la perpendiculaire. ou Prendre une ouverture de compas assez grande pour tracer un arc coupant D en deux points B et C , puis tracer un parallélogramme $ABCD$ en reportant la longueur BC à partir de A et la longueur AB à partir de C .

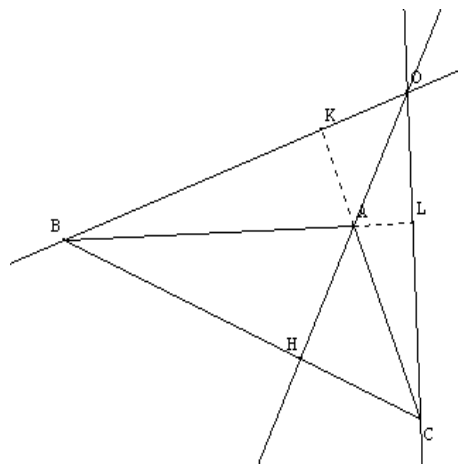
4 Les droites remarquables du triangle

4.1 Les hauteurs

On appelle hauteur du triangle toute droite perpendiculaire à un côté et passant par le sommet opposé. Les trois hauteurs se coupent en un même point (elles sont "concourantes") appelé l'orthocentre du triangle.

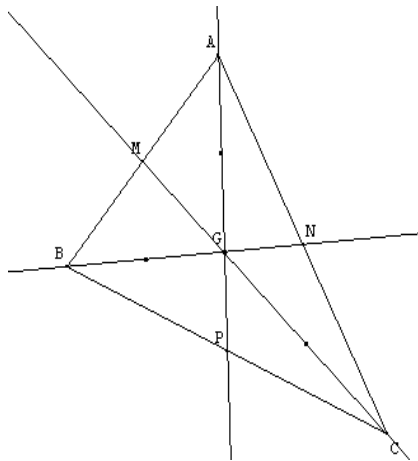


Si le triangle est acutangle, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle, si le triangle est obtusangle, l'orthocentre est extérieur au triangle, si le triangle est rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.



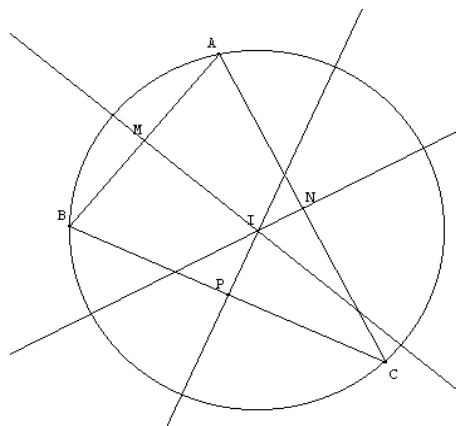
4.2 Les médianes

On appelle médiane du triangle toute droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.



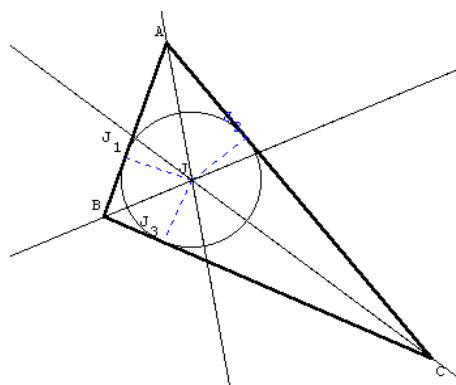
Les trois médianes se coupent en un même point appelé le centre de gravité du triangle. Le centre de gravité partage les segments des médianes intérieurs au rectangle dans un rapport de $\frac{1}{3}$.

4.3 Les médiatrices



Les trois médiatrices des côtés du triangle se coupent en un même point appelé le centre de cercle circonscrit au triangle.

4.4 Les bissectrices



Les trois bissectrices des angles du triangle se coupent en un même point appelé le centre de cercle inscrit au triangle.

5 Les quadrilatères convexes remarquables

5.1 Les trapèzes

Un quadrilatère convexe est un trapèze s'il a deux côtés parallèles. Si de plus il a un axe de symétrie, c'est un trapèze isocèle. S'il a un angle droit, le trapèze est dit trapèze rectangle.

5.2 Les parallélogrammes

Un quadrilatère est un parallélogramme si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

- ses côtés sont parallèles deux à deux
- ses côtés opposés sont égaux deux à deux
- ses diagonales se coupent en leur milieu
- le quadrilatère n'est pas croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur (égalité des vecteurs).

5.3 Les losanges

Un quadrilatère est un losange si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

- ses côtés de même longueur
- c'est un parallélogramme et ses diagonales sont perpendiculaires
- c'est un parallélogramme et deux côtés consécutifs sont de même longueur

5.4 Les rectangles

Un quadrilatère est un rectangle si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

- il a trois angles droits
- c'est un parallélogramme et ses diagonales sont de même longueur
- c'est un parallélogramme et deux côtés sont perpendiculaires

5.4.1 Les carrés

Un quadrilatère est un carré si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

- c'est un losange et il a un angle droit
- c'est un rectangle et ses diagonales sont perpendiculaires

6 Quelques théorèmes importants

6.1 Le théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en A , on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

6.2 La contraposée du théorème de Pythagore

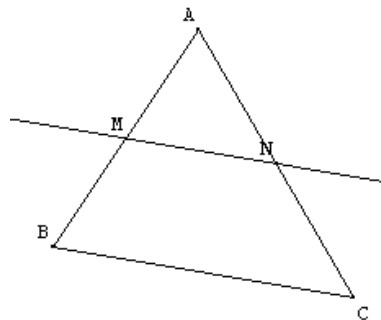
Si, dans un triangle ABC , $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A .

6.3 La réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle ABC , on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

6.4 Le théorème de la droite des milieux

6.4.1 Premier énoncé



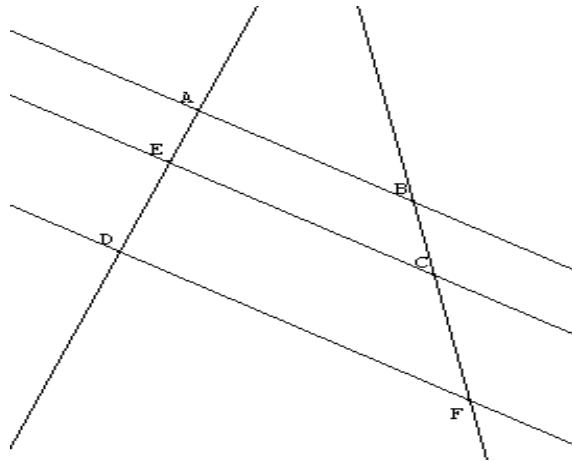
Si ABC est un triangle, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[AC]$, on a : $(MN) \parallel (BC)$ et $BC = 2 MN$.

6.4.2 Deuxième énoncé

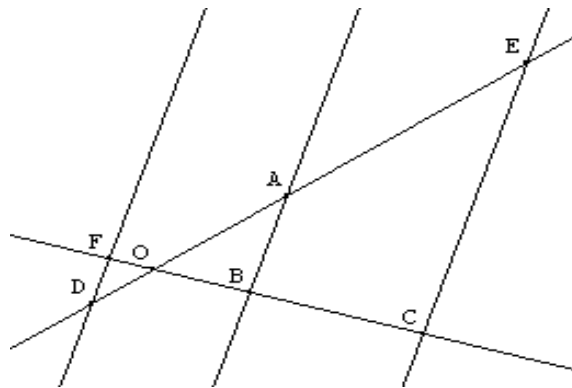
Si ABC est un triangle, M le milieu de $[AB]$ et D la droite parallèle à (BC) passant par M , alors D coupe $[AC]$ en son milieu.

6.5 Le théorème de Thalès

Si D_1 et D_2 sont deux droites sécantes, des droites parallèles sécantes avec D_1 et D_2 définissent sur elles des segments proportionnels.



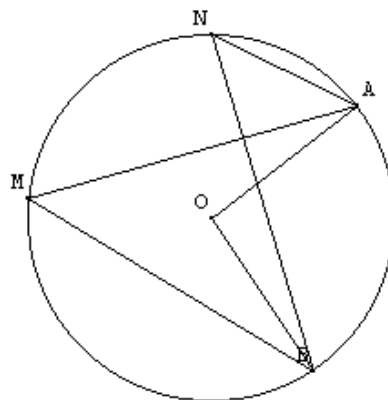
On a ainsi $\frac{AE}{AD} = \frac{BC}{BF}$



On a ici $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{EC}$ et $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OF} = \frac{AB}{DF}$

6.6 Le théorème de l'angle inscrit

6.6.1 cas général

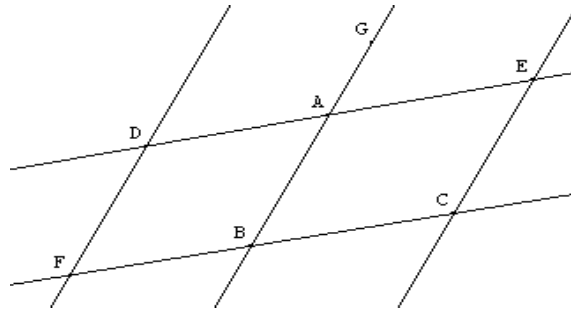


Soit C un cercle de centre O , A et B deux points de C , soient M et N deux points du même arc AB alors on a : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$.

6.6.2 Le cas du triangle rectangle

Si $[AB]$ est un diamètre du cercle C de centre O , et si M est un point de C , distinct de A et de B , alors l'angle $\widehat{AMB}$ est droit. La médiane relative à l'hypoténuse vérifie : $AO=OB=OC$.

6.7 Angles et parallèles



$\widehat{GAE} = \widehat{BAD}$ car ils sont opposés par le sommet.

$\widehat{GAE} = \widehat{ABC}$ car ils sont correspondants.

$\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ car ils sont alternes internes.