CONCOURS BLANC N°1 2005-2006: CORRIGÉ

Exercice 1

2)En faisant la somme, on obtient 6 Δ +25.
On donne à Δ les valeurs de 0 à 9 :
si Δ =0, on a 25 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =1, on a 31 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =2, on a 37 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =3, on a 43 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =4, on a 49 qui est un multiple de 7.
si Δ =5, on a 55 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =6, on a 61 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =7, on a 67 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =8, on a 73 qui n'est pas un multiple de 7.
si Δ =9, on a 80 qui n'est pas un multiple de 7.
La seule valeur possible est donc **Δ = 4.**

•E+9+7+F = 29 et E+F = 13.
les couples possibles sont donc : (4;9) (5;8) (6;7) (7;6) (8;5) et (9;4).
Le produit des chiffres est donc : E x 9 x 7 x F = 2268. on obtient donc ExF=36
Parmi les couples précédents (les conditions du (2) sont ajoutées à celles du (1)), seuls les couples (4;9) et (9;4) respectent cette condition.
Pour satisfaire à la dernière condition, la seule possibilité est le couple (4;9) soit
E=4 et F=9.

Barême pour l'exerice 1: 1 point par question

Exercice 2 :

d)On sait que ABC est un triangle rectangle en A.
D'après la propriété de Pythagore, on a :
$BC^2=AB^2+AC^2$ $AC^2=BC^2-AB^2$ $AC^2=15^2-9^2$ $AC^2=225-81$ $AC^2=144$
AC=12
AC mesure 12 cm.
Aire = AB×AC/2 Aire =9×12/2 Aire = 54
L'aire du triangle est 54 cm².
e)Le point D est sur le cercle de diamètre [AB] donc ABD est un triangle rectangle en D. De même, le point E est sur le cercle de diamètre [AB] donc ABE est un triangle rectangle en E.

On applique la propriété de Pythagore dans les 2 triangles rectangles suivants : ABD rectangle en D et ADC rectangle en D. On obtient :

$BA^2 = BD^2+AD^2$ et $AC^2 = AD^2+DC^2$.

De ces 2 égalités, en effectuant une soustraction terme à terme, je tire :

$AC^2-BA^2 = (AD^2+DC^2)-(BD^2+AD^2)$

$AC^2-BA^2=DC^2-BD^2$ et donc $DC^2-DB^2=12^2-9^2$

$DC^2-DB^2=63$.

On sait de plus que DC+DB=15

L'identité remarquable $(DC+DB)(DC-DB)= DC^2-DB^2$ me permet décrire que

DC-DB=63/15 donc DC-DB = 4,2

On a donc un système de 2 équations à 2 inconnues :

$\begin{cases} DC+DB=15 \\ DC-DB = 4,2 \end{cases}$

on a par combinaison linéaire : 2 DC=19,2 donc DC = 9,6 cm
on obtient également 2 DB = 10,8 et donc DB = 5,4 cm

f)Dans le triangle ABM, (AD) et (BE) sont 2 droites issues d'un sommet et perpendiculaires à un côté (revoir question 2 et les triangles rectangles).
Ce sont donc 2 hauteurs du triangle. Les 3 hauteurs du triangle étant concourantes, (MH) est la troisième hauteur.
De plus, d'après le théorème de la médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle, BM=AM et donc le triangle ABM est isocèle en M.
Dans un triangle isocèle, les droites médiatrice et hauteur issues du sommet principal sont confondues. Par conséquence, (MH) est aussi la médiatrice de [AB].
La médiatrice d'un segment coupe celui-ci en son milieu, I est donc le milieu de [AB] et aussi le centre du cercle (C) de diamètre [AB].
g)Par construction, M est le milieu de [BC] et celui de [EF]. BECF est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.
Dans la symétrie de centre M, l'image du triangle MBE rectangle en E est le triangle MCF rectangle en F car la symétrie conserve la mesure des angles. Les droites (CF) et (AF) sont donc perpendiculaires.
h)Dans le triangle ACK, les droites (CD) et (AF) sont issues d'un sommet et perpendiculaires au côté opposé, ceux sont donc 2 hauteurs. Leur point d'intersection M est par conséquence l'orthocentre du triangle ACK.
i)a) On sait que :

1. angle (IAJ) est droit car ABC est un triangle rectangle en A
2. angle (MIA) est droit car (MI) est la médiatrice de [AB] et que la médiatrice d'un segment coupe celui-ci perpendiculairement.
3. angle(AJM) est droit car (MJ) est la troisième hauteur du triangle AKC.

Ceci me permet de conclure que AIMJ est un quadrilatère qui a 3 angles droits, c'est donc un rectangle.
b) Dans le triangle ABC, I est le milieu de[AB] et M celui de [BC].
Or dans un triangle, le segment qui joint le milieu de 2 côtés mesure la moitié du 3ème côté,
Donc IM = AC/2 IM = 6 cm.
L'aire de AIMJ est donc : 6×4,5 = 27 cm².
c) -AIMJ étant un rectangle, on MJ = 4,5 cm et AJ = 6 cm. JC mesure donc également 6 cm.
L'aire de MJC est donc 6×4,5/2 = 13,5 cm².
-Le triangle ABC a été pavé de 4 triangles superposables et donc de même aire qui sont : BIM, AIM, AJM et MJC.
L'aire de MJC est donc aire(ABC)/4 = 54/4 = 13,5 cm²

Barême pour l'exercice 2: (6 points)
1)0,25 + 0,25
2)O,5 puis 0,5 + 0,5
3)0,75 + 0,25
4)0,25 + 0,25
5)0,5
6)O,5; 0,25 + 0,25; 0,25 + 0,25
0,5 pour la figure

Exercice 3:

9)La somme de tous les nombres de 1 à 9 est égale à 45. Ceux-ci sont répartis sur trois lignes de même somme donc chaque somme est égale au tiers de 45 soit: 15. De même pour les trois colonnes.

10)La somme décrite pas l'énoncé est la suivante:

$$S=(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g)$$

$$S= a+b+s+d+e+f+g+h+i+ 3e$$

$$S= 45+3e$$

Par ailleurs S est la somme d'une ligne, d'une colonne et de deux diagonales valant chacune 15 donc S=60

Il en résulte que 3e=15 donc e=5

10)a+e+i=15, e=5 donc a+i=10. De même on a b+h=10; c+g=10; d+f=10.

11)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Par un raisonnement analogue à celui réalisé à la question 2 on ajoute 4 diamètres pour retrouver une fois chaque nombre de 1à9 (donc une somme de 45) et 3 fois le centre, d'où l'égalité demandée.

Pour déterminer toutes les valeurs possibles pour le centre c il suffit d'essayer toutes les possibilités et garder celles dont la somme du triple et de 45 est un multiple de 4...

Valeur de c	***3c+45***	***Multiple de 4?***	***Valeur de chaque diamètre***
1	48	Oui: 4x12=48	12
2	51	non	
3	54	non	
4	57	non	
5	60	Oui: 4x15=60	15
6	63	non	
7	66	non	
8	69	non	
9	72	Oui : 4x18=72	18

Je vous laisse le soin de déterminer trois roues de centres respectifs 1; 5; 9 de diamètres correspondants 12; 15; 18 toutes les autres se déduisent de celles-ci aisément.

6)La somme des nombres de 1 à 16 est égale à 136, répartis en 4 lignes, 4 colonnes et deux diagonales égales au quart de 136: soit 34.

Dans la première colonne a= 34-(1+8+13) donc a = 12
Pour l'une des deux diagonales 13+10+7+b=34 donc b=4
Dans la première ligne c=34-(1+14+4) donc c=15
Dans la quatrième ligne d+e= 34-(13+16) donc d+e=5, comment faire 5 en ajoutant deux nombres? 1+4 non puisque 1 est déjà utilisé, 2+3 ... essayons d=2 e=3
Dans la deuxième colonne f= 34 – (15+10+2) donc f=7 impossible puisque déjà pris
Essayons alors d=3 et e=2: f=6 ouf!

Maintenant vous pouvez finir tout seuls....

1	c	14	b
a	f	7	
8	10		
13	d	e	16

<u>Questions complémentaires</u>

7- L'objectif principal d'un enseignant qui met en œuvre cette séance est sans doute la résolution de problèmes.
Il s'agit de proposer à l'élève un problème ouvert (problème pour chercher) dans lequel il devra émettre des hypothèses sur la valeur de la somme des lignes, des colonnes et des diagonales et les tester, autrement dit, élaborer une démarche et la mener à son terme.
Dans cette optique, il paraît pertinent de fournir une calculatrice aux élèves qui auraient une connaissance médiocre des répertoires additifs et soustractifs.
Un autre objectif de l'enseignant pourrait être le réinvestissement, dans un cadre nouveau, de procédures relevant du calcul réfléchi et, dans ce cas, la calculatrice serait, bien sûr, à proscrire.
Cette activité permet aussi le développement de compétences logiques mais celles – ci ne figurent pas en tant que telles dans les Instructions officielles ; on les retrouve dans le domaine de la résolution de problèmes.

8- Face à ce carré vierge, les élèves vont remplir au hasard la première ligne par exemple puis compléter la première colonne en respectant la première somme trouvée. A ce stade, il leur reste 4 nombres qu'ils ne pourront plus placer si la somme est différente de 15 et s'ils ont déjà employé le nombre 5.

9-
a- La phase collective intervient après la recherche individuelle qui risque de ne pas avoir abouti pour une majorité d'élèves. Sa fonction serait donc de relancer l'activité des élèves après avoir fait émerger les contraintes de la situation.
L'enseignant a choisi de ne présenter que des productions réussies et de faire constater que, dans ce cas, la somme constante est égale à 15 et le terme central à 5.
b- L'erreur n'a pas été prise en compte ; beaucoup d'élèves restent avec leur solution fausse et sont amenés à appliquer une consigne dans la phase suivante sans en avoir compris la raison.
Il aurait pu choisir une véritable phase de confrontation en affichant, par exemple, trois productions erronées et trois exactes , en faisant apparaître toutes les sommes en bout de ligne, colonne et diagonale. Il aurait alors laissé un temps d'observation puis interrogé d'abord les élèves qui n'avaient pas réussi.
Les hypothèses proposées par les élèves seraient alors confirmées ou infirmées avec la présentation d'une nouvelle série de productions…..
Cette démarche a un inconvénient, c'est de prendre beaucoup de temps mais elle a un avantage considérable, c'est de permettre à tous les élèves une véritable compréhension du problème !

10- A première vue, la situation de la « roue magique » est plus facile que celle du carré magique de côté 4. Pour la « roue », il s'agit encore de placer les neuf premiers nombres et moyennant une légère déformation du cercle, on peut constater que la roue est identique au carré de la situation A dans lequel on aurait supprimé les première et troisième lignes ainsi que les première et troisième colonnes. Il s'agit donc d'un exercice d'application de la règle définie lors de la phase collective. On peut donc penser que <u>l'enseignant a l'intention de proposer la situation B aux élèves qui n'ont pas réussi la situation A</u>.

En fait, cette « roue » est beaucoup plus riche qu'il n'y paraît puisque la valeur de la case centrale peut aussi être 1 ou 9…, ce qui peut être l'objet d'une nouvelle recherche.

La situation C pourra être proposée en réinvestissement aux élèves ayant réussi la situation A. Ils devront calculer la somme des nombres de 1 à 16, ce qui demande une certaine organisation ; ils peuvent être déstabilisés par l'absence de case centrale.

Les nombres choisis permettent de remplir une ligne, une colonne et une diagonale par recherche d'un complément à 34. Il reste alors 6 nombres à placer 2, 3, 5, 6, 9 et 11 qu'il faut accoupler pour compléter des sommes à 26, ce qui peut conduire les élèves à beaucoup d'essais infructueux.

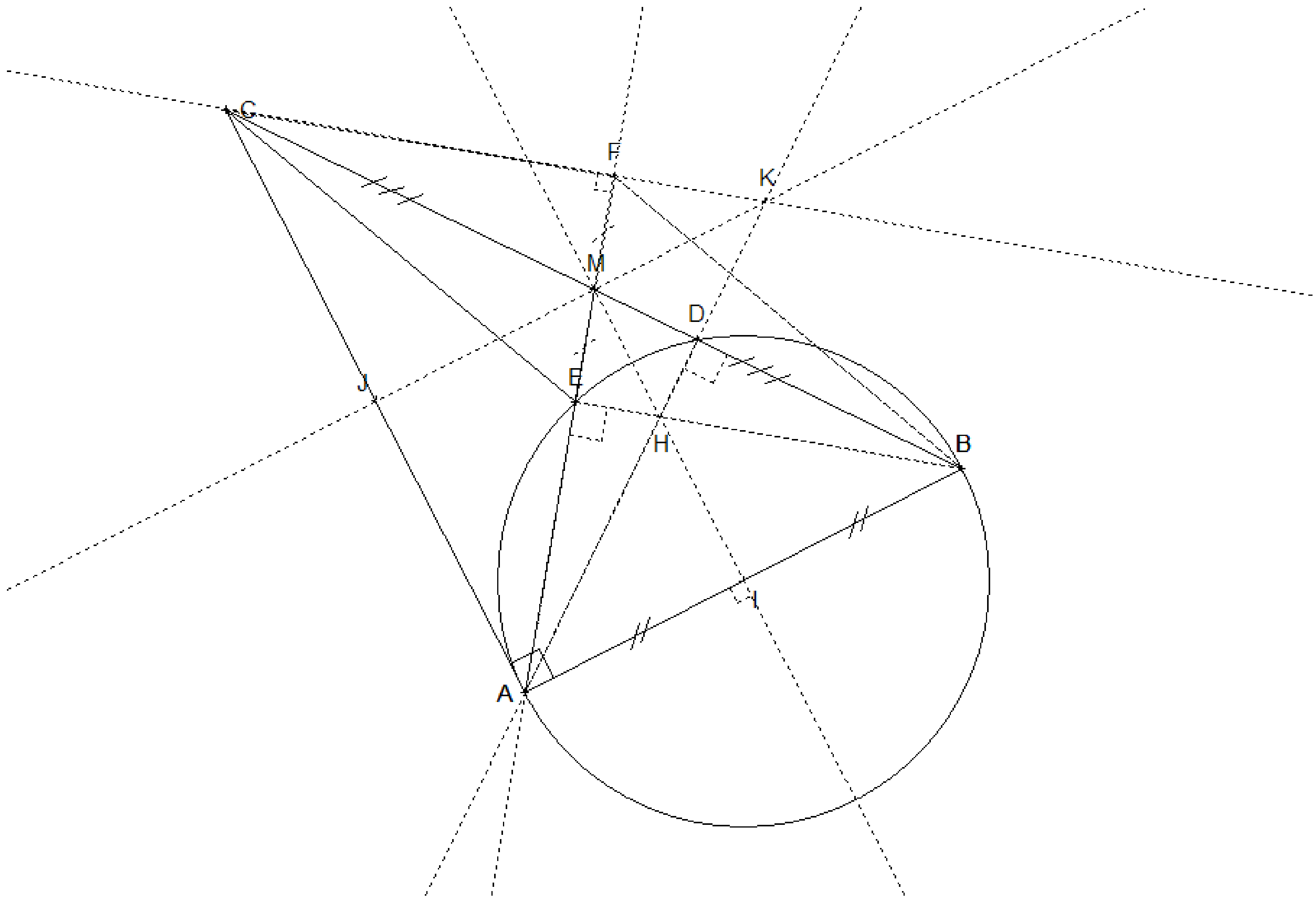
11- En clair, dans la recherche C, la somme totale des nombres à utiliser peut être réinvestie mais il n'y a pas de case centrale et la recherche des compléments ne se résume plus à une décomposition de 10.

Le choix des cases déjà remplies est une variable didactique importante. On aurait pu les disposer de façon à ce que chaque somme comporte déjà 3 termes. Telle quelle, la situation est bien plus difficile et constitue une véritable recherche dans le champ additif.

Barème pour l'exercice 3 (11 points)

Partie math (3 points)
Question 1 : 0,25
Question 2 : 0,5
Question 3 : 0,25
Question 4 : 0,25 (au moins 2 justes)
Question 5 : 1,25 (0,25 + 0,5 + 0,5)
Question 6 : 0,5

Partie didact (8 points)
Question 7 : 2 points (1 par objectif et conséq/calculat)
Question 8 : 1 point (0,5 pour la somme et 0,5 pour la case cent)
Question 9 : a- 0,5 point b- 1,5 (0,5 pr le choix de l'enseignant et 1,5 pour un autre choix justifié)
Questions 10 et 11 : 1 point pour la recherche B et 2 pour la recherche C



C
F
K
M
D
E
J
H
B
I
A