Concours 2006 - proposition de correction

Exercice 1

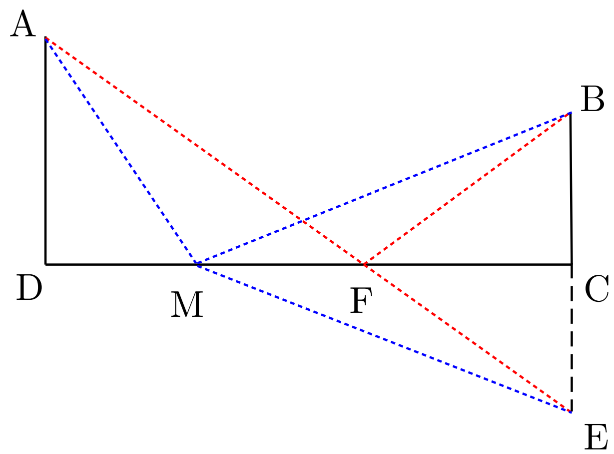
1. La face ABCD est comme la face EFGH : à points.
   La face ADHE est comme la face BCGF : unie.
   La face DCGH est comme la face ABFE : rayée.
2. Les patrons admissibles sont le 1 et le 3 car ce sont les seuls pour lesquels les faces de même motif ne sont pas contiguës.
3. (a) Il y a 9 cubes par étage et 3 étages, donc 27 petits cubes.
   (b) Le volume du grand cube est de 216 cm^3. Tous les petits cubes sont identiques, le volume de chacun est donc de : $\frac{216}{27} = 8$ cm^3.
   (c) 8 est le cube de 2, donc l'arête du petit cube mesure 2 cm. Comme il y a 3 arêtes de petit cube dans chaque arête du grand cube, celle-ci mesure 6 cm.
   (d)

Nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de petits cubes	1	6	12	8	0	0	0

   (e) Chaque face du grand cube contient 9 faces décorées de petit cube, il y a donc en tout : $9 \times 6 = 54$ faces décorées. [1]
4. (a) Le volume du solide est le volume du grand cube moins 8 fois le volume du petit cube, donc : $216 - 8 \times 2^3 = 152$ cm^3.
   (b) L'aire du nouveau solide est la même que celle du cube initial car les trois faces enlevées à chaque sommet sont remplacées par trois nouvelles faces "en creux".
   L'aire est donc : $6 \times 6^2 = 216$ cm^2.

Exercice 2

1. 1 cm de la figure représente 1 km, donc 100 000 cm. L'échelle est donc $\frac{1}{100000}$.



2.

3. B et E sont symétriques par rapport à (DC), donc (DC) est la médiatrice de [BE].
   Donc pour tout point M de la droite (CD), on a l'égalité : MB=ME.
   En particulier, on a : FB=FE.
   L'inégalité triangulaire nous indique que si le triangle AME n'est pas aplati, AM+ME>AE, donc AM+MB>AE.
   Or F est un point du segment [AE], donc AE=AF+FE=AF+FB.
   Donc on a : AM+MB>AF+FB, si M n'est pas le point F.

[1] On peut aussi trouver le résultat à partir du tableau de la question précédente : $0 \times 1 + 1 \times 6 + 2 \times 12 + 3 \times 8 = 54$.

4. Si on construit la gare en un point M différent de F, d'après la question précédente le trajet est plus long que si on la construit en F. Il faut donc la construire en F. [2]
5. Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (CD), elles sont donc parallèles entre elles.
   Les poitns D, F et C d'une part, A, F et E d'autre part sont alignés.
   On peut donc appliquer le théorème de Thalès :
   $\frac{\text{FD}}{\text{FC}} = \frac{\text{AD}}{\text{EC}}$.
   Or BC=CE=4 et AD=6, donc $\frac{\text{FD}}{\text{FC}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
   D'où : $\text{FD} = \frac{3}{2}\text{FC}$
6. FC+FD=CD=14 donc $\text{FD} + \frac{3}{2}\text{FC} = 14$, d'où $\frac{5}{2}\text{FC} = 14$ et $\text{FC} = \frac{2}{5} \times 14 = 5,6$ km.
7. Les triangles ADF et BCF sont rectangles, on peut y appliquer le théorème de Pythagore. On a donc : FA^2=AD^2+FB^2 et FB^2=BC^2+FC^2
   FD=14-FC=8,4 km.
   Donc : FA+FB=$\sqrt{6^2 + 8,4^2} + \sqrt{4^2 + 5,6^2} = \sqrt{106,56} + \sqrt{47,36} \approx 17,20465$ km. Au mètre près, le trajet mesure donc 17204 ou 17205 mètres, suivant que l'on arrondit par défaut ou par excès.

Partie complémentaire

1. (a)
      - L'élève peut tracer la perpendiculaire à la droite passant par A, à l'aide de son équerre. (procédure experte)
      - L'élève peut tracer plusieurs segments et les mesurer, il verra qu'en se rapprochant du projeté orthogonal de A sur la droite, il obtiendra des segments de plus en plus courts. (procédure tâtonnée)
      - L'élève peut tracer des cercles de centre A en réduisant ou augmentant le rayon jusqu'à arriver à la situation de tangence.
      - l'élève peut tracer une verticale. (procédure fausse mais probable).

   (b) Le maître veut faire émerger la propriété : le minimum de distance entre un point et une droite est obtenu en traçant la perpendiculaire à la droite passant par le point et en reliant le point à l'intersecttion de la droite et de cette perpendiculaire.
   Les obstacles qui peuvent se présenter sont :
      - des difficultés dans l'utilisation de l'équerre ;
      - des erreurs de précision de mesurage ;
      - l'impression que plusieurs points peuvent convenir (impression liée au manque de précision de la mesure) ;
      - l'incompréhension de la notion de distance d'un point à un ensemble.

   (c) En privilégiant les directions des bords de la feuille l'enseignant risquerait d'installer un théorème élève fâcheux : le minimum de distance est obtenu en traçant la verticale ou l'horizontale à partir du point.

   (d) L'ensemble des points situés à 7 cm de la droite est la réunion de deux droites parallèles situées de part et d'autre de la droite initiale.
2. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet :
   - de multiplier les tracés sans encombrer la figure ;
   - de gagner du temps : on peut produire rapidement une multitude de figures ;
   - d'avoir des mesures aussi précises que l'on veut ;
   - de prendre conscience, en déplaçant le point, du fait que la distance diminue puis augmente, donc passe par un minimum
   - en déplaçant le point A et la droite, de conjecturer la propriété ;

[2] On notera le haut niveau d'invraisemblance du sujet : quelle peut être l'utilité de minimiser le trajet AG+GB ? Les voyageurs habitent en A ou en B, pourquoi devraient-ils effectuer le trajet complet entre les deux villes en passant pas la gare ?...

– en traçant la perpendiculaire, de vérifier la propriété conjecturée.

Exercice 3

1. (a) Pierre et Jean peuvent commencer par faire des échanges : Pierre donne 7 jetons bleus en échange de 3 jetons rouges, il peut ensuite fournir les 34 points sous la forme : 1 rouge et 9 bleus.
   Autre solution : Pierre donne 16 jetons (48 points) et Jean lui rend 2 jetons (14 points).

   (b) Soient x et y respectivement le nombre de jetons rouges et bleus de Paul. On a :

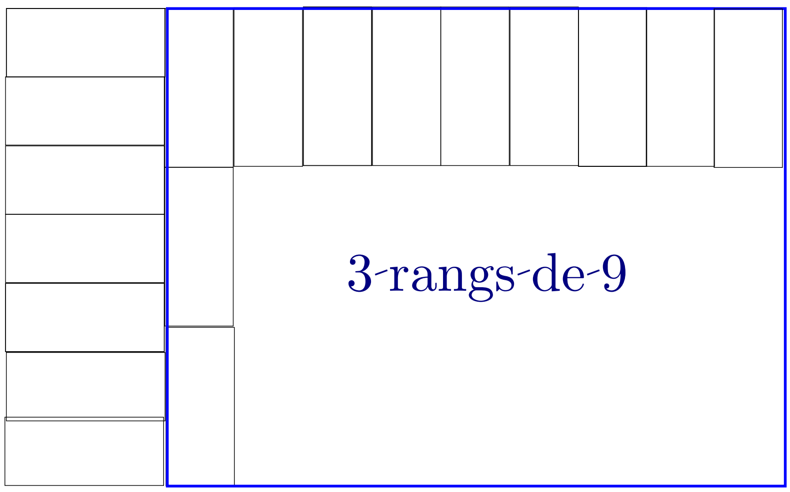
$$\begin{cases} x + y = 29 \\ 7x + 3y = 94 \end{cases}$$

   La résolution de ce système conduit à des solutions non entières. Donc Paul se trompe. [3]

   (c) Céline possède au maximum 4 jetons rouges car le total de points est inférieur à 35.
   On essaie donc tous les cas :

Céline a 0 jetons rouges	reste : 34 points	impossible, 34 n'est pas multiple de 3
Céline a 1 jetons rouge	reste : 27 points	possible, avec 9 jetons bleus
Céline a 2 jetons rouges	reste : 20 points	impossible, 20 n'est pas multiple de 3
Céline a 3 jetons rouges	reste : 13 points	impossible, 13 n'est pas multiple de 3
Céline a 0 jetons rouges	reste : 6 points	possible, avec 2 jetons bleus

2. L'aire de la plaque est de 21×34 cm^2 et l'aire d'un rectangle est de 21 cm^2. On pourra donc au maximum placer 34 rectangles.
   D'après la question précédente, on a : $34 = 7 + 9 \times 3$, donc on peut disposer les rectangles de la manière suivante :



   On atteint bien ainsi le maximum de 34.

Partie complémentaire

1. La notion de périmètre est requise pour la dernière question, l'activité est donc au cycle 3.
2. – L'élève peut mesurer sur la figure.
   – L'élève peut confondre la longueur et la largeur, ne pas les reconnaître sur la figure et diviser 10 par 2 pour donner l'une ou l'autre des dimensions.
3. L'élève trouve la longueur de l'étiquette en considérant que trois d'entre elles mesurent 18 cm.
   Puis il en déduit que 16 cm de largeur du rectangle correspondent à deux longueurs et deux largeurs d'étiquette, donc deux largeurs mesurent 4 cm, donc une largeur mesure 2 cm.
4. L'élève doit connaître la notion de périmètre, la formule liant le périmètre du carré et la longueur du côté. De plus il doit organiser une démarche de résolution plus complexe.

[3] Autres solutions : montrer qu'avec un nombre impair de jetons valant 3 ou 7, on ne peut pas atteindre un score pair, ou montrer qu'il y a au plus 2 jetons rouges (sinon le total dépasse 98) et étudier les cas 0, 1 ou 2 jetons rouges.