Aix-Marseille 2000

Corrigé issu des annales COPIRELEM 2000

Premier volet

Exercice 1

1. A est la somme de l'aire du carré ABCD et de l'aire du demi-disque de diamètre [BC]. La longueur du côté du carré a pour pour mesure 2, comme le diamètre du disque.
   Donc $A = 4 + \frac{\pi}{2}$.
2. (a) Si M appartient au segment[AB], $A(x)$ est la mesure de l'aire du triangle AMO, dont la hauteur relative au côté [AM] (de mesure x) a pour mesure 1.
   Donc $A(x) = \frac{x}{2}$.

   (b) Si M appartient au demi-cercle d'extrémités B et C, $A(x)$ est la somme des mesures des aires du triangle AOB et du secteur de disque de diamètre [BC] délimité par les rayons [OB] et [OM].
   L'aire du secteur de disque est proportionnelle à la longueur de l'arc et pour un arc de longueur π (demi-cercle) l'aire est $\frac{\pi}{2}$. Donc pour un arc de longueur $x - 2$, l'aire du secteur sera $\frac{x-2}{2}$.
   Donc $A(x) = 1 + \frac{x-2}{2} = \frac{x}{2}$.

   (c) Si M appartient au segment[CD], $A(x)$ est la somme des mesures des aires du triangle AOB, du demi-disque de diamètre [BC] et du triangle OCM.
   Dans le triangle OCM, le côté [CM] a une mesure de $x - (\pi + 2)$ et la hauteur correspondante mesure 1.
   Donc $A(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{x - (\pi + 2)}{2} = \frac{x}{2}$
3. (a) On cherche x tel que $A(x) = \frac{1}{4}A$.
   Si M est en D, l'aire balayée est égale à 2 fois l'aire du triangle AOB plus celle du demi-disque, elle vaut donc $2 + \pi$.
   Or $\frac{1}{4}A < 2 + \pi$, donc M est avant D. On peut utiliser la formule : $A(x) = \frac{x}{2}$.
   On a donc $A(x) = \frac{x}{2} = \frac{1}{4}A$ si $\frac{x}{2} = 1 + \frac{\pi}{8}$.
   D'où $x = 2 + \frac{\pi}{4}$.

   (b) Comme AB=2, on a $x = \text{AB} + \frac{\pi}{4}$.
   Or $\frac{\pi}{4}$ représente le quart de la longueur du demi-cercle en partant de B.
   Donc pour construire P au quart du demi-cercle il suffit de tracer la médiatrice du segment [BC], cette médiatrice coupe le demi-cercle en Z, on trace ensuite la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BOZ}}$. Cette bissectrice coupe le demi-cercle en P.

Exercice 2

- Résultat 1 : L'ordre de grandeur du quotient n'est pas respecté car $400 \times 12 = 4800$.
- Résultat 2 : le reste est supérieur au diviseur.
- Résultat 3 : le chiffre des unités de $3382 \times 12 + 6$ est un 0 et non un 6.
- Résultat 4 : si le reste était nul, le nombre 40626 serait divisble par 4, or ce n'est pas le cas. (critère : 26 n'est pas divisible par 4.)

Exercice 3

Appelons x la longueur du premier tronçon (la montée à l'aller), alors $\frac{x}{2}$ est la longueur du deuxième tronçon.

1. La durée du parcours aller est donc : $T_{aller} = \dfrac{x}{20} + \dfrac{\frac{x}{2}}{40} = \dfrac{5x}{80}$.
   La vitesse moyenne sur ce parcours aller est donc :
   $V_1 = \dfrac{x + \frac{x}{2}}{\frac{5x}{80}} = \dfrac{\frac{3x}{2}}{\frac{5x}{80}} = \dfrac{3x}{2} \times \dfrac{80}{5x} = 24.$
   Donc $V_1 = 24$ km/h.
2. La durée du parcours retour est :$T_{retour} = \dfrac{\frac{x}{2}}{20} + \dfrac{x}{40} = \dfrac{x}{20}$.
   La vitesse moyenne sur le retour est donc :
   $V_2 = \dfrac{x + \frac{x}{2}}{\frac{x}{20}} = \dfrac{\frac{3x}{2}}{\frac{x}{20}} = \dfrac{3x}{2} \times \dfrac{20}{x} = 30.$
   Donc $V_2 = 30$ km/h.
3. La durée du parcours aller-retour est : $T_{aller} + T_{retour} = \dfrac{5x}{80} + \dfrac{x}{20} = \dfrac{9x}{80}$.
   La vitesse moyenne est donc :
   $V_3 = \dfrac{3x}{\frac{9x}{80}} = \dfrac{3x}{1} \times \dfrac{80}{9x} = \dfrac{80}{3}.$
   Donc $V_3 \approx 26{,}67$ km/h.

Exercice 4

Soit $a = \overline{mcdu}$ l'écriture décimale du nombre recherché. On a alors :
- a est supérieur à 7000, donc $7 \leqslant m \leqslant 9$.
- $m = 2c$ donc m est pair, donc $m = 8$ et $c = 4$.
- a est un multiple de 45, donc un multiple de 9 et de 5.
  Comme a est impair, $u = 5$.
  Le seul nombre de la forme $\overline{84d5}$ qui soit multiple de 9 est 8415.

Donc $a = 8415$

Premier volet - Analyse de productions

Solution du problème proposé aux enfants :

	Aubin 800	Elias 78	Durand 60	Créon 254	Béal 430	Fustier 305
Boîtes	8	0	0	2	4	3
Etuis	0	8	6	6	3	1

1. Dans ce problème, la compétence en termes de connaissance des nombres concerne la signification des chiffres dans l'écriture en base 10 d'un nombre inférieur à 1000.
   Les élèves doivent comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres pour résoudre un problème de partage en centaines et en dizaines (ils peuvent extraire directement l'information contenue dans l'écriture du nombre ou retrouver cette information par comptage ou calcul).
   cdu : c pour les centaines donc c boîtes et d pour les dizaines donc d ou d+1 étuis selon que u= 0 ou non.
2. Classement des productions en fonction des procédures :
   Catégorie 1 : Les élèves qui utilisent une schématisation : Benoît et Mickaël. Ces deux élèves utilisent une représentation figurative liée au matériel de numération ; ils représentent ainsi une décomposition canonique additive (suivant les puissances de dix) des nombres : le trait représente 1, le petit rectangle représente 10 et le grand représente 100.
   On peut penser que ces décompositions ont été obtenues par comptage sur les puissances de 10.

   Catégorie 2 : Les élèves qui utilisent des décompositions additives ou "hybrides" (faisant intervenir l'addition et la multiplication) suivant les puissances de 10.
   Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de la valeur positionnelle des chiffres ; mais nous

faisons ici l'hypothèse que les élèves de cette catégorie ont retrouvé ces décompositions par calcul ou comptage de 100 en 100, puis de 10 en 10 avec ajout final des unités quand elles existent.
On peut distinguer deux sous-catégories :

– Isabelle, Elise et Charles qui produisent des décompositions additives des nombres (additions réitérées de 100 puis de 10) ;
– Claire qui produit une décomposition hybride faisant intervenir l'addition et la multiplication.

Catégorie 3 : Les élèves qui utilisent directement la valeur positionnelle des chiffres : Alice, Alain et Odile. On peut éventuellement distinguer Odile d'Alain et d'Alice qui explicitent la décomposition en centaines , dizaines et unités.

Remarques importantes :

(a) Benoît ne pense pas à commander un étui supplémentaire pour les unités : il ne prend pas en compte toutes les contraintes de la situation.
(b) Elise n'obtient la décomposition que pour les nombres multiples de 10.
(c) Charles trouve deux décompositions par un calcul en colonnes (addition posée) dans les deux cas les plus simples (800 et 60), c'est à dire sans unités et avec un seul chiffre non nul. Il résout sans doute mentalement et de façon correcte le problème pour 430.
On peut aussi faire l'hypothèse que les calculs de Charles sont des vérifications de résultats obtenus mentalement à partir de la signification des chiffres ; dans ce cas, la production de Charles relèverait de la catégorie nř3.
(d) Claire écrit des égalités incorrectes comme $2 \times 100 = 200 + 5 \times 10 = 250 + 4$.
Celles-ci montrent cependant comment elle cumule les centaines, puis les dizaines et enfin les unités pour atteindre chaque nombre.
(e) Alain écrit directement la décomposition du type xc yd zu, tandis qu'Alice s'aide d'un tableau de numération.
(f) Odile n'explicite pas sa procédure ; on peut supposer qu'elle a extrait directement les informations de l'écriture chiffrée sans utiliser la moindre décomposition. Elle traduit immédiatement en termes de boîtes et d'étuis les chiffres des centaines et des dizaines (on peut regretter l'absence de justifications et d'explications relatives à la technique utilisée).

Remarques de détail :

(a) Benoît ne traite pas le cas de 305, peut-être par manque de temps.
(b) Mickaêl résout correctement l'exercice mais il ne transforme pas "7 étuis et 1 étui" en 8 étuis (on retrouve ce type d'oubli chez Alain et Claire).
(c) Elise réussit dans deux cas (800 et 60) ;mais pour 430, sa décomposition est exacte (avec une égalité incorrecte) avec une conclusion fausse (4 boîtes 6 étuis).
(d) Claire écrit 7 x 100 à la place de 7 x 10 .
(e) On peut relever chez Odile l'égalité incorrecte : "305 = 3 boîtes et 1 étui".

3. Rangement des productions de la plus élémentaire à la plus experte :
Pour effectuer ce rangement on peut prendre pour critères le degré d'abstraction (de conceptualisation) et le principe d'économie (écritures plus courtes, gain de temps,...) :

– Mickaêl : schématisation par juxtaposition de symboles qui évoquent le matériel de numération.
– Isabelle : les symboles sont remplacés par les écritures chiffrées 100 et 10 ; le signe + remplace la juxtaposition ;
– Claire : les sommes réitérées sont remplacées par des écritures multiplicatives (écritures plus économiques).
– Alice : elle explicite la valeur positionnelle des chiffres dans un tableau ; il n'y a plus comptage ou calcul pour trouver la décomposition.
– Alain : il procède de la même façon mais sans tableau.
– Odile : elle conclut sans s'aider d'écritures du type c/d/u.

Second volet - Didactique

Questions sur le document A :

1. (a) Les propriétés mathématiques qui peuvent être mises en jeu par les élèves pour résoudre le problème des calendriers, l'exercice 1 et l'exercice 2, sont les deux propriétés de linéarité des fonctions linéaires attachées à ces situations de proportionnalité :
   - la propriété de linéarité multiplicative : $f(k.x) = k.f(x)$ Pour le problème des calendriers, les élèves mettent en jeu cette propriété lorsqu'ils calculent le prix de 60 calendriers en multipliant par 4 le prix de 15 calendriers : $f(60) = f(4 \times 15) = 4 \times f(15)$
   - la propriété de linéarité additive : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ Pour l'exercice nř1 par exemple, les élèves mettent en jeu cette propriété lorsqu'ils calculent la distance parcourue en 16 minutes en additionnant les distances respectivement parcourues en 6 et 10 minutes : $f(16) = f(6) + f(10)$
     On peut remarquer que, pour le problème des calendriers , comme pour l'exercice nř2, la propriété de linéarité multiplicative suffit : dans le premier cas, tous les nombres de calendriers sont des multiples de 15 ; dans le second, tous les nombres de petits pains sont multiples de 5.
     Dans ces deux cas, les élèves peuvent aussi effectuer un passage par l'unité, c'est à dire utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour trouver le prix d'un calendrier ou d'un petit pain pour les petits pains). Ensuite ils peuvent utiliser de nouveau cette propriété pour calculer le prix de x calendriers ou de x petits pains : $f(x.1) = xf(1)$ *; mais ils peuvent aussi utiliser implicitement la relation fonctionnelle définissant la fonction linéaire associée à la situation :* $f(x) = 20x$ *ou* $f(x) = 3x$ *selon le cas ; ils obtiennent le prix de x objets en multipliant le nombre d'objets par le prix unitaire.*

   (b) Pour l'exercice 1 :
   - cet exercice fait appel à la notion de vitesse uniforme qui est à peine abordée au cycle III ;
   - la question et l'énoncé ne présentent pas les grandeurs dans le même ordre (durée puis distance dans l'énoncé, distance puis durée dans les questions) ;
   - le passage par l'unité n'est guère envisageable au CM1, car il oblige les élèves à manipuler des décimaux non entiers ($154 \div 10 = 9 \div 6 = 1,5$) ;
   - de plus, ce nombre représente la distance parcourue en 1 minute et s'interprète plus difficilement qu'un prix unitaire ; l'utilisation par les élèves de la relation fonctionnelle $f(x) = 1,5.x$ n'est donc guère envisageable ;
   - deux couples de nombres sont donnés, alors que dans le premier problème un seul couple était fixé ;
   - dans la question 1), la seule procédure envisageable est donc l'utilisation de la propriété de linéarité additive ; or jusqu'ici, les élèves ont pu résoudre tous les exercices proposés en utilisant seulement la propriété de linéarité multiplicative.

   L'exercice 2, lui, ne présente aucune difficulté particulière : 15 et 20 sont des multiples de 5 et la "table de cinq" est bien connue des élèves au CM ; le passage par l'unité a du sens et les calculs sont simples. Il est cependant possible que l'utilisation à deux reprises du nombre 15 (15F puis 15 petits pains) provoque une confusion chez certains élèves.

   (c) Les différentes démarches utilisées par les élèves pour résoudre le problème des calendriers proposé dans l'étape 1 ont été , au cours de l'étape 2, "analysées, validées ou non, comparées pour leur efficacité". Cette étape 2 a donc du faire émerger les propriétés de la proportionnalité que les élèves vont pouvoir réinvestir dans l'exercice 2 ; en effet celui-ci présente un contexte analogue à celui du problème des calendriers (situation du type : nombre d'objets / prix), avec des relations multiplicatives simples.

2. La consigne de l'exercice 3 :
   La consigne proposée n'est pas claire car elle parle de "deux recettes" alors qu'il s'agit de la même recette (même mousse au chocolat) ; afin de la rendre compréhensible par les élèves sans explications supplémentaires, on pourrait la reformuler ainsi :
   "Voici la même recette de mousse au chocolat pour des nombres de personnes différents. Retrouve les quantités manquantes."
   Ou bien :

« Voici une recette incomplète pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes. Il manque le nombre de cuillères d'eau. Papa veut utiliser cette recette. Il sait qu'en mettant 8 œufs il faut mettre 4 cuillères d'eau. Retrouve les nombres manquants. »
Avant toute consigne, il serait raisonnable de s'assurer que les enfants comprennent cette notion de recette. En amont, une séance cuisine où il faudrait effectivement réaliser une recette simple donnée pour un nombre de personnes double serait bienvenue (exemple : des crêpes).

3. Les tableaux proposés aux élèves dans les exercices 4 et 5 n'ont pas apporté l'aide escomptée car :
   - Les tableaux dans l'étape 2 ont été présentés uniquement pour organiser les données et les résultats déjà connus, le tableau constituant alors une présentation synthétique de l'exercice résolu. Ces tableaux n'ont jamais été utilisés pour résoudre les exercices, ni pour expliciter, de façon contextualisée, les raisonnements mis en œuvre. Or dans l'étape 3, le tableau est donné et se substitue à la situation.
   - La donnée d'un tableau sans opérateur comme outil de résolution de problèmes n'est pas pertinente à ce stade car elle induit des procédures mécaniques de recherche de relations entre les nombres et occulte la reconnaissance la situation multiplicative.
   - De plus, le choix des nombres proposés peut induire des démarches erronées par recherche de régularité ; les élèves assimilent, à tort, proportionnalité à régularité. Par exemple, pour l'exercice 4, après un doublage pertinent pour passer de la case 1 à la case 2, il comptent de 5 en 5 (le passage de 15 à 30 dans le second tableau s'explique sans doute par l'absence de la case 4). Dans l'exercice 5, le premier tableau après le doublage se poursuit par un comptage de 6 en 6 ; le début du deuxième tableau est construit suivant un algorithme de doublage de case en case, puis l'enfant se perd sans doute dans ses calculs.

   Questions sur les documents A et B :.
4. Procédures pour trouver le prix de 250g de fromage sachant que le prix de 100g est 8F :
   - Recherche du coefficient de proportionnalité :
     $a = 8100 = 0,08$ d'où le prix des 250g : $a \times 250 = 20$
   - Utilisation de la propriété de linéarité multiplicative :
     $250 = 2,5 \times 10\ 0$ d'où le prix des 250g : $2,5 \times 8 = 20$
     $250 = \dfrac{1000}{4} = \dfrac{10 \times 100}{4}$ d'où le prix des 250g : $\dfrac{8 \times 10}{4} = 20$
   - Utilisation des propriétés de linéarité additive et multiplicative :
     $250 = 100 + 100 + 100 \div 2$
     d'où le prix des 250g : $8 + 8 + 8 \div 2 = 8 + 8 + 4 = 20$
   - En s'appuyant sur d'autres réponses obtenues précédemment : (utilisation implicite de la propriété de linéarité additive)
     250 = 300 Ů 50 d'où le prix des 250g : 24 Ů 4 = 20
   - Le passage par l'unité :
     Prix d'un gramme : $8 \div 100 = 0,08$ F d'où le prix des 250g : $0,08 \times 250 = 20$
   - Egalité des rapports :
     $\dfrac{8}{100} = \dfrac{X}{250}$ donc $= \dfrac{8}{100} \times 250 = 20$
5. Les nombres 104 et 12 d'une part, 150 et 58 d'autre part ont été choisis par les auteurs pour mettre en évidence une erreur assez fréquente chez les élèves :
   l'utilisation d'un modèle additif (utilisation erronée de la conservation des écarts).
   En effet, les élèves, ne voyant pas de relations multiplicatives simples entre les données, utilisent souvent des relations additives qui traduisent des raisonnements erronés du type :
   "le poids a augmenté de 4g (respectivement de 50g) donc le prix a augmenté de 4F (respectivement de 50F)"
   que l'on peut aussi formuler ainsi :
   ils utilisent la règle additive erronée : $f(x + a) = f(x) + a$ à la place de la propriété de linéarité multiplicative $f(kx) = kf(x)$.
   Le choix de ces nombres a un autre intérêt. Ils peuvent faire émerger des contradictions dans les résultats obtenus, de sorte que les élèves soient amenés lors d'un débat à corriger leurs erreurs pour résoudre ces contradictions.

Si certains choisissent 58F pour le prix de 150g, d'autres vont se rendre compte que ce prix est supérieur au prix pour 300g.
Si certains associent 12F et 104 g (probable, vu la difficulté que pose le choix de 104g) d'autres élèves, voire les mêmes, vont associer 12F et 150g (résultat exact et assez facile à trouver). Les deux réponses ne peuvent être justes simultanément. Il faudra trouver l'erreur.

6. Justification de la réponse exacte dans le cas de 104g :
Dans un premier temps, le maître peut faire chercher un résultat approché : 104g est légèrement supérieur à 100g, donc le prix est légèrement supérieur à 8F.
La recherche de la valeur exacte peut alors se faire avec l'aide soutenue dit l'enseignant :
celui-ci peut suggérer aux élèves de trouver le prix de 4g en cherchant **une relation multiplicative entre 4 et 100** , de façon à en déduire que 4g coûtent "25 fois moins" que 100g (utilisation de la propriété de linéarité multiplicative), Comme la séquence se situe dans un CM1, **l'enseignant évitera le recours aux décimaux** en faisant exprimer les prix en centimes ; le prix en centimes des 4g de fromage sera alors donné par la division de 800 par 25, soit 32 centimes pour 4g. L'utilisation implicite de la propriété de linéarité additive donne alors le prix des 104g : 8F32cts.
Autres justifications possibles :
   - Avec la même démarche que ci-dessus, trouver le prix en centimes d'un gramme de fromage et en déduire le prix des 104g en multipliant par 104.
   - On peut envisager de travailler en francs, mais de confier les calculs à une calculette.
   - Une fois que les élèves ont reconnu qu'il fallait calculer le prix de 4g, l'enseignant peut donner ce prix et le faire vérifier : en le multipliant par 25, on retrouve bien le prix des 100g.
   - On peut aussi utiliser la propriété de linéarité multiplicative en utilisant le prix de 10400g comme intermédiaire :
     $10400 = 104x100$ ...coûtent ...$104 \times 8 = 832$ F. et 104 coûteront 100 fois moins, soit 832 centimes.

7. Suggestions de modifications de la deuxième séance du document A :
Il faudrait supprimer l'utilisation des tableaux dans la présentation des données des exercices 4 et 5 ; il est préférable de fournir celles-ci en vrac, dans le désordre, pour éviter les automatismes.
On peut alors utiliser la mise en commun pour faire expliciter verbalement les différents raisonnements utilisés de façon contextualisée, élaborer avec les élèves une présentation collective de tous les résultats sous forme d'un tableau et leur demander de mettre en évidence, sur le tableau, les calculs intermédiaires et les raisonnements utilisés en s'appuyant sur le contexte de la situation.
On peut aussi envisager, avec le support des tableaux, de faire rechercher d'autres procédures, d'autres raisonnements. On sera aussi attentif au choix des données numériques, en proposant des couples de nombres susceptibles de faire émerger des erreurs significatives (voir question 5), exploitables en classe de façon constructives.