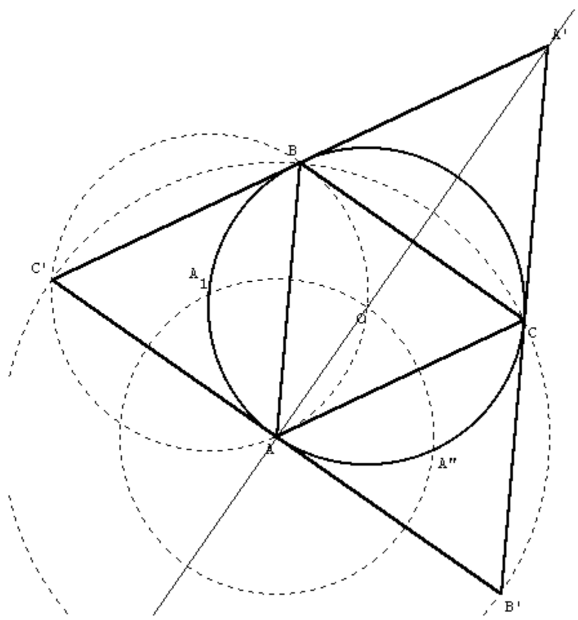
SUJET n°11

Première partie - volet 1

Exercice 1

1. (a) Pour tracer un carré inscrit dans un cercle, il suffit de tracer deux diamètres perpendiculaires qui seront les diagonales du carré.
On trace donc une droite passant par O, soient A et C les points d'intersection de cette droite avec $\mathcal{C}$. On prend une ouverture de compas supérieure à la distance AC. On pointe successivement en A et en C et on trace deux arcs qui se coupent en deux points. La droite passant par ces deux points coupe $\mathcal{C}$ en B et D qui sont les deux autres sommets du carré. ABCD est bien un carré car ses diagonales se coupent en leur milieu (c'est un parallélogramme), sont de même longueur (c'est un rectangle) et sont perpendiculaires (c'est un losange).
   (b) L'aire du carré est deux fois l'aire du triangle ABC, donc $2\dfrac{OB\times AC}{2}$ donc $2r^2$.

2. La distance OO' est constante, égale à $r\sqrt{2}$. Donc O' appartient au cercle de centre O et de rayon $r\sqrt{2}$. Réciproquement si un point O' est sur ce cercle, on considère le carré de diagonale OO', soient A et B les deux autres sommets de ce carré, et complétons le carré $ABCD$ tel que O en soit le centre, alors O' est le symétrique de O par rapport à (AB). Le cercle est donc décrit en entier.



3. (a)
Pour tracer un triangle équilatéral dans le cercle, on choisit un point A sur le cercle, on ouvre le compas de la longueur OA, on pointe en A et on reporte deux fois cette longueur de part et d'autre de A sur le cercle. Soient B et$C$ les point obtenus. On a $AB = AC$ par construction. Donc ABC est un triangle isocèle en A. Si $A1$ est le point obtenu en reportant une fois la longueur OA sur le cercle, entre A et B, les triangle $OAA1$ et $A1OB$ sont équilatéraux, donc l'angle $\widehat{AOB}$ mesure $120°$, donc l'angle $\widehat{ACB}$, angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$, mesure $60°$. On en déduit que AOB est un triangle équilatéral. (Une autre solution serait de tracer un diamètre $[AD]$ puis la médiatrice de $[OD]$ coupant le cercle en B et en C).

Calculons l'aire de ABC. Soit M le milieu de $[BC]$, et D le point d'intersection de la demi-droite $[AM)$ et du cercle. $BOMD$ est un losange, donc M est le milieu de $[OD]$.
On a donc : $AM = \dfrac{3r}{2}$.
Le triangle OMB est rectangle, car les diagonales du losange $BOMD$ sont perpendiculaires.
On peut appliquer le théorème de Pythagore :
$BM^2 + OM^2 = OB^2$, d'où $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2}$,
donc $BM = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2} = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.
La mesure de l'aire de ABC est alors égale à deux fois la mesure de l'aire de AMB, donc à
$MB \times AM = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{3r}{2}$. Cette aire mesure donc $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}$.

(b) Le triangle $A'BC$ est l'image du triangle équilatéral ABC par la symétrie d'axe (BC). Il est donc équilatéral.
Donc les angles $\widehat{BA'C}$, $\widehat{A'BC}$ et $\widehat{BCA'}$ mesurent 60°.
On montre de même que les triangles $B'AC$ et $C'AB$ sont équilatéraux.
Les mesures des angles permettent de montrer, d'une part, que les points A',B,C' (respectivement A', C, B' et B',A, C') sont alignés et d'autre part que les angles du triangle $A'B'C'$ mesurent 60°. Ce triangle est donc équilatéral et A, B, C sont les milieux des côtés..
Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle $A'B'C'$ car, celui-ci étant équilatéral, ses médianes sont aussi ses bissectrices.

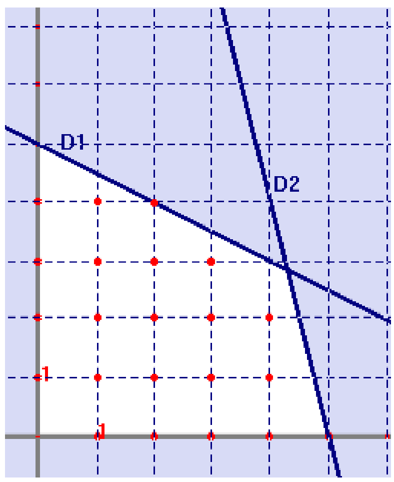
Exercice 2

1. Le nombre de sacs est un des nombres 3, 4 et 5. Le nombre de paquets est un des nombres 2 et 3. Il y a donc 6 couples possibles à essayer.

sacs	paq.	masse	prix	tickets	
3	2	3,50 kg	1,75€	5	oui
3	3	3,75 kg	2,25€	6	oui
4	2	4,50 kg	2,00€	6	oui
4	3	4,75 kg	2,50€	7	oui
5	2	**5,50 kg**	2,25€	7	non
5	3	**5,75 kg**	2,75€	8	non

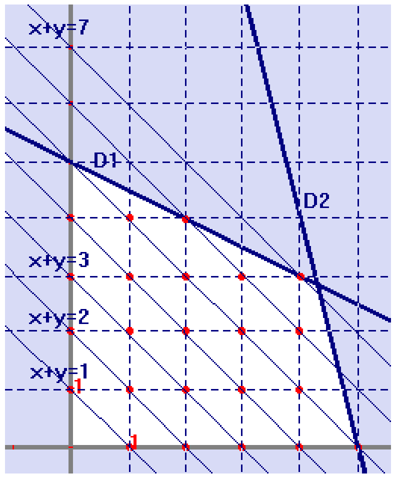
La solution optimale est obtenue pour 4 sacs et 3 paquets, donc 7 tickets de tombola.

2. Si x désigne le nombre de sacs et y le nombre de paquets, on a les contraintes suivantes :
   - x et y sont des entiers naturels.
   - La masse achetée est inférieure ou égale à 5kg, donc $x + 0,25y \leqslant 5$.
   - Le coût total est inférieur à 2,50€, donc $0,25x + 0,5y \leqslant 2,5$.

3. 

4. La relation $x + 0,25y \leqslant 5$ caractérise un demi plan délimité par D1, la relation $0,25x + 0,5y \leqslant 2,5$ caractérise un demi plan délimité par D2. De plus x et y sont positifs. Les points de coordonnées entière de la zone non grisée correspondent aux choix d'achat compatibles avec les contraintes.

Il faut, pour résoudre le problème, maximiser la quantité $x+y$. On cherche quelle est la valeur maximale de l'entier n, tel que la droite d'équation $x+y=n$ passe par un des points repérés.



On constate que la valeur maximale est $n=7$, on l'obtient pour $x=4$ et $y=3$. Cela recoupe le résultat de la question 1.

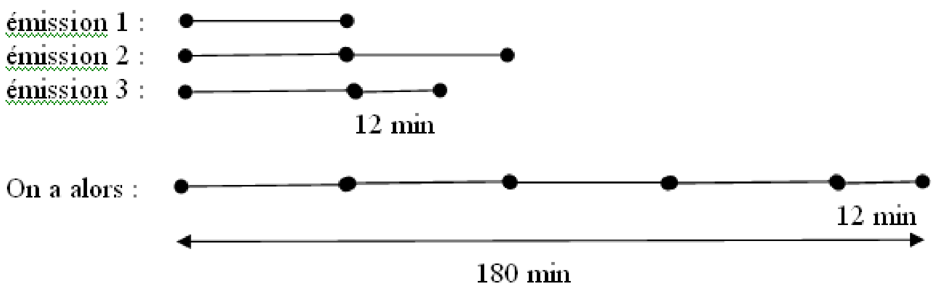
Exercice 3

Soient x, y et z les durées respectives des trois émissions.

Les relations données par l'énoncé se traduisent par le système $\begin{cases} x+y+z=180 \\ y=2x \\ z=x+12 \end{cases}$

dont la résolution conduit à : $\begin{cases} x=42 \\ y=84 \\ z=54 \end{cases}$

On peut résoudre le problème avec une solution graphique, en représentant les émissions par des segments mis bout à bout.



On en déduit que quatre fois la durée de l'émission 1 équivalent à 180 - 12 = 168 min.
La durée de l'émission 1 est donc obtenue par division (ou multiplication à trou) de 168 par 4.

Une aide possible : des bandes de papier ou des légos de deux tailles différentes pour matérialiser les segments dessinés plus haut, ou le schéma sans les nombres.

Exercice 4

Le problème posé est un problème additif de composition de transformations d'état. Les transformations sont des ajouts, on connaît l'état final et on demande l'état initial. L'énoncé n'indique pas la chronologie des deux transformations. Il s'agit donc d'un problème assez compliqué.

Élève	**Proc. de résolution**	**Proc. de calcul**	**Hypothèses sur les erreurs**
Élève 1	Il calcule le nombre de photocopies qui ont été effectuées. Il effectue une addition. Il soustrait le nombre trouvé à l'état final du compteur. Il conclut en donnant sa réponse.	Addition et soustraction en ligne.	Une erreur de calcul dans l'addition, l'élève a oublié la retenue (sans doute car il a effectué l'addition en ligne et non en colonnes). L'erreur de la soustraction peut être une erreur de calcul, ou une perte " du fil " : l'élève pose une soustraction mais effectue une addition. (Peut-être par effet de contrat, pour faire un calcul).
Élève 2	Il additionne tous les nombres de l'énoncé.	Addition en ligne.	L'élève n'a pas compris le problème, mais il a reconnu un problème additif. Il peut aussi s'agir d'un effet de contrat didactique (on utilise tous les nombres dans une opération), ou d'une "préférence" pour une opération que l'élève maîtrise. Peut-être a-t-il cru que 1043 était l'état initial, auquel cas sa procédure serait correcte ? Il oublie une retenue dans son calcul.
Élève 3	Il " remonte le temps ". L'élève cherche l'état intermédiaire en soustrayant les photocopies de la première maîtresse. Puis il cherche de même l'état initial en soustrayant les photocopies de la deuxième maîtresse à l'état initial.	Soustractions posées en colonnes.	L'élève se trompe dans ses deux soustractions : dans chaque colonne, il soustrait systématiquement le plus petit nombre du plus grand.
Élève 4	Il calcule le nombre total de photocopies. Il trouve 110 qu'il décompose en 100+10. Il soustrait 100 et 10 à 1043 en s'aidant d'un schéma illustrant son calcul.	Calcul en ligne pour l'addition. Calcul réfléchi pour la soustraction.	Pas d'erreurs.