Concours Blanc - Correction

Exercice 1

1. Construire un segment [BC] de longueur 105mm (règle graduée), puis les cercles (B,45mm) et (C,75mm), de centres respectifs B et C, et de rayons respectifs 45 et 75mm (compas).
   Soit A l'un de leurs points d'intersection ; tracer (règle) les segments [AB] et [AC] ; on obtient bien le triangle demandé. ***(0,25 pt)***
2. Tracer la médiatrice du segment [AC] (règle et compas) qui coupe ce dernier en son milieu M.
   Tracer le cercle de centre M et de rayon MC.***(1 pt)***
3. Le cercle coupe les droites (BC) et (AB) respectivement aux points K et L ; les angles inscrits A C et A L qui interceptent le diamètre [AC] sont donc des angles droits.
   Il suffit de tracer (règle) les droites (AK) et (CL) pour obtenir les hauteurs relatives aux côtés [BC] et [AB].
   Ces deux droites se coupent en l'orthocentre H du triangle ABC ; la troisième hauteur passe par H et il suffit de la tracer : c'est la droite (HB) (règle) ; ce qui achève la construction. ***(1,25 pt)***

Exercice 2

Alzheimer avait plus de 25 ans en 1908, il est donc né au $XIX^{'eme}$ siècle. Soit $18xy$ son année de naissance.
En 1908 l'âge d'Alzheimer était donc de :
$1908 - (1800 + 10x + y) = 108 - 10x - y$.
Cet âge était supérieur de 25 ans à la somme des chiffres de son année de naissance,
donc $108 - 10x - y = 25 + 1 + 8 + x + y$.
D'où la relation : $74 = 11x + 2y$.
Cherchons les couples (x, y), avec x et y entiers compris entre 0 et 9, vérifiant cette relation. Le seul qui convienne est (6,4). Donc Alzheimer est né en 1864.
L'année de sa mort est multiple de 9 et de la forme $191z$. Donc $11 + z$ est un multiple de 9. La seule valeur qui convienne est $z = 7$.
Donc Alzheimer est mort en 1917. (En fait il est mort en 1915...).***(3 pt)***

Exercice 3

Première partie

1. Il y a 1 numéro gagnant par dizaine. Le nombre de dizaines de 1000 est 100.***(0,5 pt)***
2. Soit N le nombre de personnes ; $N = 6k - 1$ avec k entier.
   De plus $4N \leqslant 1000 \leqslant 5N$ donc $200 \leqslant N \leqslant 250$.
   On cherche les multiples de 6 proches de 200 : $198 = 6 \times 33$.
   Donc 197 est le dernier nombre de la forme $6k - 1$ inférieur à 200 donc, de 6 en 6, on trouve que N peut valoir : 203, 209, 215, 221, 227, 233, 239, 245. ***(1 pt)***
3. Parmi ces nombres, en divisant par 11 ou en utilisant le critère de divisibilité par 11, seul $209 = 11 \times 19$ est multiple de 11. ***(0,5 pt)***

Deuxième partie

1. Le nombre de billets gagnants est le nombre de dizaines du nombre total de billets (on accepte le dixième.)***(0,25 pt)***
2. On travaille en cycle 3 car l'enfant résout des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et il sait trouver le nombre de dizaines d'un nombre. De plus le registre de nombres atteint le millier. ***(0,5 pt)***
3. Par exemple à l'aide d'un compteur, les enfants afficheront les billets gagnants en ne tournant que les bandes chiffrées concernant les dizaines et les centaines.
   On peut aussi donner un livre ayant plus de 1000 pages pour permettre aux enfants de trouver ces billets. ***(0,5 pt)***

4. On veut un exercice qui porte sur le nombre de dizaines :
   On veut vendre 1500 chocolats par paquets de 10. Combien de paquets vendra-t-on ? ***(0,75 pt)***
5. **Elève A** : Il a peut-être considéré que 3 n'est pas un nombre ou oublié la première dizaine.
   Elève B : Il a dénombré les 10 billets gagnants inférieurs à 100 ; il a conservé en mémoire ce résultat 10 en comptant ensuite par centaine mentalement. Lorsqu'il passe à 100, il compte 20. Lorsqu'il passe à 200, il compte 30 et ainsi de suite jusque 1000 où il compte 110. (ou bien il compte aussi la dernière dizaine, celle qui commence par 1000).
   Elève C : Résultat correct.
   Elève D : Il a peut-être considéré que les billets ont obligatoirement 3 chiffres car dans le tableau de numération on ne met pas d'habitude 0 pour premier chiffre à gauche donc le chiffre des centaines n'est pas le chiffre 0.
   9 possibilités pour le chiffre des centaines et 10 pour celui des dizaines donc 90 possibilités.
   Elève E : Il écrit dans le tableau de numération 3 pour le chiffre des unités qui se trouve ainsi fixé ; il écrit les différentes possibilités de chiffres pour les centaines.
   Il fait de même pour le chiffre des dizaines mais il ne réalise pas que, à chaque chiffre des centaines, on doit associer toutes les possibilités (10) pour le chiffre des dizaines.
   Par habitude d'utilisation du tableau de numération, il considére qu'il y a autant de possibilités que de lignes dans son tableau, soit 10. ***(1 pt)***

Exercice 4

Première partie

Soit x le nombre total de jetons et soit n le nombre de jetons par côté pour la première tentative.
On obtient les systèmes équivalents suivants :
$$\begin{cases} x-52=n^2 \\ x+60=(n+4)^2 \end{cases} \begin{cases} x=n^2+52 \\ n^2+52+60=(n+4)^2 \end{cases} \begin{cases} x=n^2+52 \\ n^2+112=n^2+8n+16 \end{cases} \begin{cases} x=n^2+52 \\ 96=8n \end{cases}$$
D'où $n=12$ et $x=196$. ***(1,5 pt)***

Deuxième partie

1. Pb1 : 4, 9 et 16 (les réponses 0 et 1 sont acceptées mais non exigées).
   Pb2 : oui, car 324 est un carré parfait, c'est le carré de 18.
   Pb2 : non, car 2700 n'est pas un carré parfait, il est compris strictement entre 51^2 et 52^2. ***(0,25 pt)***
2. La notion mathématique illustrée est celle de racine carrée.***(0,25 pt)***
3. Ces problèmes ont leur place à l'Ecole Elémentaire ce sont des "problèmes pour chercher" Ce type de problèmes concerne des situations pour lesquelles les élèves ne disposent pas d'une solution experte a priori pour la résolution, cette solution experte pouvant être enseignée bien plus tard dans le scolarité et qui nécessitent donc la recherche de procédures personnelles permettant de les résoudre. Le problème des " choux à planter en carré " est de ce type car chaque élève peut mettre en œuvre des procédures permettant de le résoudre (cf. questions suivantes) bien que la procédure experte sous-jacente (utilisation de la racine carrée) soit construite effectivement en classe de quatrième.***(0,75 pt)***
4. Les compétences requises relèvent du cycle 3, probablement du CM2 car l'élève doit maîtriser les prérequis suivants :
   – déterminer par multiplication le nombre d'objets d'une configuration rectangulaire (la multiplication n'est pas indispensable pour s'engager dans une procédure de résolution - le comptage ou l'addition réitérée suffit - mais semble incontournable pour résoudre tous les problèmes, compte tenu de la taille des nombres)
   – calculer le produit de deux nombres entiers naturels par un calcul mental (pb1) ou posé (pour les pb2 et 3). On fait l'hypothèse que la calculatrice ne soit pas utilisée pour tous les problèmes.

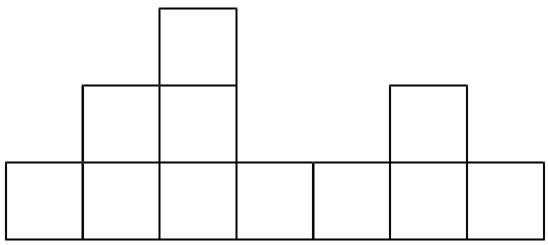
   Si l'élève dispose d'une calculatrice, les problèmes peuvent être posés plus tôt dans le cycle 3. ***(1 pt)***
5. Trois procédures correctes (1,5pt soit 0,5 pt par procédure précisément décrite. Si deux procédures sont grossièrement identiques, on ne compte pas les 0,5pt)

– pour le premier problème : l'élève dessine un carré de (2 jetons de côté), il compte (ou il effectue une addition, ou il calcule mentalement le produit) les jetons dessinés. Il compare le nombre trouvé à 25 et réitère cette procédure jusqu'au carré de 5 jetons de côté).
– pour le second problème : l'élève peut procéder par essais successifs soit de manière systématique (il commence à 6 jetons par côté et effectue la multiplication, puis par 7. . .) soit en démarrant par un nombre " assez grand " puis essais systématiques (il commence par 10 jetons de côté, puis 11. . .) soit par essais et ajustements (il commence par 10 jetons de côté, c'est pas assez, puis 20 jetons de côté, c'est trop. . . .)
– pour le troisième problème : il utilise une des stratégies ci-dessus (sauf la première trop longue ici) et trouve que 51x51=2601 puis 52x52=2704. Il conclut alors que ce n'est pas possible.

(1,5 pt)

6. Le problème 1 peut avoir une fonction d'appropriation de la situation pour chaque élève. Il permet donc de préciser nettement la tâche à accomplir et de s'assurer que chaque élève puisse ainsi s'engager, de manière profitable, dans la recherche du problème 2.***(0,25 pt)***
7. Le problème 3 n'est pas une simple reprise du problème 2 car il s'agit cette fois de prouver une impossibilité. Cette situation est donc propice à la mise en œuvre et au travail de compétences liées à l'argumentation alors que le problème 2 est plus centré sur la recherche de procédures.***(0,25 pt)***
8. – pour le premier problème, la calculatrice est à proscrire car les calculs à effectuer (additions réitérées ou multiplications) sont élémentaires.
   – pour le second problème, le choix est discutable. En effet, on peut imaginer de ne pas l'utiliser car les produits ne sont pas encore trop nombreux et les nombres pas trop " grands ". On peut aussi faire le choix de l'utiliser si on estime que ses élèves ne maîtrisent pas encore suffisamment les techniques de calcul nécessaires et/ou si on estime qu'ils risquent d'être découragés par les calculs à effectuer.
   – pour le troisième problème, il semble pertinent de l'utiliser. Le nombre d'essais est important, la taille des nombres également. L'élève risque d'être découragé par les calculs à effectuer, alors que l'aspect intéressant de ce problème relève de l'argumentation.***(0,75 pt)***

Exercice 5

1. Mur A : 1101001101 ; Mur B : 1000 ; Mur C : 100001111 ***(0,25 pt)***
2. 

(0,25 pt)

3. N'importe quel mur a un code qui commence par 1 (en effet il faut bien placer le premier cube du mur)
Pour 2 cubes on obtient 10 et 11
Pour 3 cubes on obtient 100,101, 110, 111
Pour 4 cubes on obtient 1000, 1001 ,1010,1011, 1100, 1101,1110,1111 ***(0,75 pt)***
4. Tout mur , donc en particulier un mur à 5 cubes, a un code qui commence par 1 ; les autres chiffres sont des 1 ou des 0 ;le codage général d'un tel mur est donc 1abcd où a,b,c,d sont des chiffres choisis indépendamment les uns des autres dans l'ensemble {0,1}.***(0,5 pt)***
5. Avec 6 cubes, on place le premier cube ; il y a une seule façon de le placer ; pour le deuxième , il y a deux façons : soit au dessus (code 0) soit à côté(code 1) ; il y a donc deux façons de choisir les deux premiers cubes ; pour chacune de ces deux façons il y a encore . . .
Avec 6 cubes on peut fabriquer 2^5 murs ; avec 12 cubes on peut fabriquer $2^1 1$ murs ; avec n cubes , on peut conjecturer (ou mieux démontrer) qu'il y en aura 2^{n-1}.***(1,25 pt)***