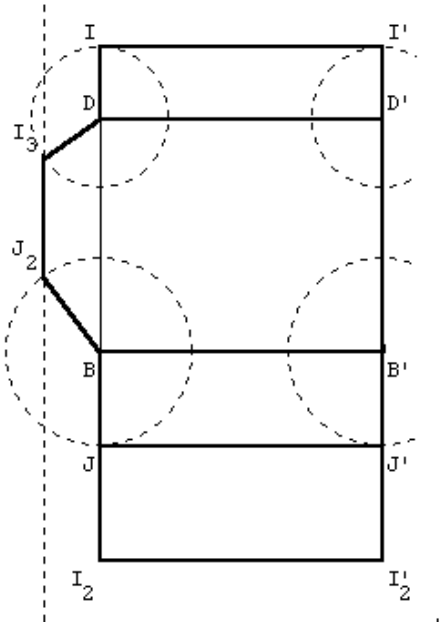
SUJET n°6 - Correction

Première partie - volet 1

Exercice 1

1. Si un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit des segments mesurant 4 et 3, son aire est égale à 6 cm^2. L'hypoténuse mesure 5 cm, d'après le théorème de Pythagore. Soit h la mesure de la longueur de la hauteur relative à l'hypoténuse, on a donc : $\frac{5\times h}{2} = 6$, d'où $h = \frac{6}{5} = 2,4$ cm.
2. (a)
   - BJJ'B' et DII'D' sont des rectangles : ce sont des figures planes car elles sont situées sur des faces de la boîte, et (JJ') (respectivement (II')) est un axe de symétrie du rectangle ABB'A' (respectivement (ADD'A'). Les dimensions de ces rectangles sont : longueur BB'= 6 cm, largeur BJ=2 cm.
   - La face BDD'B' est un rectangle : c'est une figure plane car les droites (DD') et (BB') sont parallèles toutes deux à (AA'), donc parallèles entre elles, c'est un parallélogramme car les côtés sont deux à deux de même longueur, BB'=DD'=6 cm et BD=B'D'=5cm (d'après la question précédente). De plus, (BB') est perpendiculaire au plan ABCD, donc à BD, donc BDD'B' a un angle droit. Les dimensions de cette face sont : longueur BB'=6 cm, largeur BD=5 cm. IJJ'I' est un rectangle pour des raisons analogues. Ses dimensions sont : longueur JJ'=BB'=6 cm, IJ = BD/2 = 2,5 cm.
   - BJID et B'J'I'D' sont des trapèzes. Montrons le pour BJID : I et J sont les milieux des segments [AD] et [AB], d'après le théorème de la droite des milieux, on a (IJ)//(BD). Les dimensions sont : BD=5 cm, IJ=2,5 cm, DI=1,5 cm et JB=2 cm.

   (b) Pour tracer le patron, on place d'abord les quatre faces rectangulaires.
   Pour tracer le trapèze BJID, on utilise le fait que la hauteur du triangle ABD mesure 2,4 cm, d'après la question 1. Comme (IJ) est une droite des milieux dans ce triangle, elle coupe la hauteur en son milieu. Donc la hauteur du trapèze mesure 1,2 cm. Il suffit de tracer une parallèle à (BD) située à 1,2 cm de celle-ci et de considérer l'intersection de cette parallèle avec les cercles de centres B et D et de rayons respectifs 1,5 cm et 2 cm, à savoir les moitiés de AD et de AB.



   (c) Le volume du prisme s'obtient comme différence du volume du demi-parallélépipède et de celui du prisme triangulaire de base AIJ. On obtient $\frac{4\times3\times6}{2} - \frac{2\times1,5}{2}\times6 = 36 - 9 = 27\ cm^3$

Exercice 2

1. Les dimensions de B1 sont plus petites que celles de B2, donc B1 peut être placée dans B2.
2. Le volume de B1 est strictement compris entre une fois et deux fois celui de B2. Donc B1 ne pave pas B2.
3. $\frac{80}{72} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$ et $\frac{60}{48} = \frac{3}{2}$. Comme $\frac{10}{9} \neq \frac{3}{2}$, B2 n'est pas un agrandissement de B1.
4. Une boîte cubique pave B1 si la longueur a de son arête est un diviseur des trois dimensions de B1, donc si a est un diviseur de 72, 36 et 48, donc de leur PGCD, c'est à dire de 12, donc si a appartient à {1,2,3,4,6,12}, il faut alors respectivement, 124416, 15552, 4608, 1944, 576 et 72 cubes pour paver B1.
5. Par le même raisonnement, une boîte C pave B2 si a est un diviseur de PGCD(80,40,60), donc de 20. Une boîte pave donc B1 et B2 si son arête est simultanément diviseur de 20 et de 12, donc si a est un diviseur de PGCD(12,20), donc de 4. a peut donc prendre les valeurs 1, 2 et 4. On place alors respectivement 192000, 24000 et 3000 cubes dans B2.
6. Les notions de diviseurs communs et PGCD de plusieurs nombres.

Partie didactique

1. Soit a la mesure en cm du côté du carreau, a doit est le PGCD de 144 et de 96. Or $144 = 2^4 \times 3^2$ et $96 = 2^5 \times 3$, donc $a = 2^4 \times 3 = 48$.
2. La notion sous-jacente est celle de diviseur, voire de diviseur commun. On peut proposer cette activité en début de cycle 3.
3. L'élève peut essayer des carrés de plus en plus grands : côté 1, 2, 3, 4,... jusqu'à ce qu'il ne trouve plus de solutions.
4. Pour résoudre le problème 1, l'élève doit avoir intégré la notion de multiple, il doit connaître ses tables (s'il n'a pas de calculatrice à disposition), il doit savoir que les côtés d'un carré sont de même longueur, enfin il doit disposer des compétences usuelles face à un problème : comprendre l'énoncé, élaborer une stratégie, faire des essais ...
5. - La présence du dessin du rectangle peut induire des procédures graphiques. Cette figure a disparu pour le deuxième problème.
   - Le premier problème demande plusieurs solutions, le second demande la plus grande. Cela induit un changement de procédure car pour le premier problème on peut se contenter (à l'extrême) de dire que des carreaux de côté 1 ou 2 cm conviennent.
   - Pour se ramener à un problème d'arithmétique, dans le second problème, il faut convertir les données en centimètres.
6. Benoît calcule combien de fois l'aire du carreau de côté 4 "entre" dans l'aire du rectangle proposé. Pour effectuer les calculs il utilise que 16 c'est 4 fois 4 et il divise donc l'aire totale successivement deux fois par 4. Il trouve 252.

   Son raisonnement n'est pas correct, car il ne suffit pas que deux figures aient la même aire pour qu'elles soient superposables. Ainsi avec un rectangle de 82×72, son raisonnement lui aurait indiqué que $82 \times 72 = 16 \times 369$, cependant les carreaux de côté 4 ne pavent pas le rectangle, aucune des deux dimensions n'étant divisible par 16.